浦谷 規 監修

シリーズ
〈金融工学の基礎〉

6

確率解析と伊藤過程

小川重義 著

朝倉書店

まえがき

所詮有限個の情報しか扱えない我々人間にとって，森羅万象は不確定要素に満ちており，程度の差こそあれ，あらゆる現象の数理モデルは統計的あるいは確率的なものとならざるをえない．そうしたモデル化において不確定要素を表す代表的な素材がブラウン運動である．花粉から出てくる微粒子がプレパラート上の水中で不規則運動を示すことが植物学者 ロバート・ブラウン（Brown）により報告されて以来，この熱力学的現象が多くの科学者の注目を集めてきたことはよく知られている．さらに，1923 年になってこの現象がノーバート・ウィーナー（Wiener）により確率過程としてモデル化され，数学的実在として数理科学に導入されたことも科学史における重要な事柄として衆知のところであろう．そして 50 余年後，このブラウン運動はファイナンス理論の主役となって登場してきた．もっともウィーナーよりさらに以前（1900 年）に，市場現象の考察からブラウン運動の概念をその背後に見ていたフランスの研究者バシュリエ (Bachelier) の存在は見逃せないが，社会科学におけるブラウン運動の活用は現代の数理ファイナンス理論をもって嚆矢とするといっても過言ではなかろう．

ではなぜブラウン運動が注目されるようになったのか？　経済活動は偶然性を含むゲームであり確率過程として表現されるが，市場の環境や活動は参加者全てにとって公平なものでなければならない．このような要求に適う確率過程をマルチンゲールという．ブラウン運動が重要な要素として登場する理由は，この確率過程が連続な見本関数を持ちながら同時にマルチンゲールという性質を持つからである．ブラック–ショールズ理論（Black-Sholes, 以後簡単のため BS 理論などと略記する）によれば，株価の時間的変動はこのブラウン運動（の微分過程）によって駆動される微分方程式，すなわち確率微分方程式，によって記述され，各種オプションの適正価格など関連する経済的諸量はこの方程式

の解である確率過程の汎関数として記述される．

金融工学の数理モデルは伊藤清によって確立された確率解析と確率微分方程式理論の上で展開されている．したがって，BS モデルをはじめとする理論の理解と自在な応用には，いわゆる**伊藤理論**と称される確率解析理論のある程度の修得が不可欠である．さりながら，この理論は近代確率論（測度論的確率論）の上に構築された純数学理論であり，その習得は数学（特に確率論）を専門としない者にとってそれほど容易なことではない．この難点を解決する便法として，ファイナンス理論の対象を離散的な状況に限定し測度論的議論を回避するというやり方が考えられる．実際多くの既刊書ではこのやり方をとっているようであり，それなりの成功を収めている．しかし著者が周囲の若手学習者達の印象を見聞するところでは，離散的モデルから BS モデルをはじめとする連続的モデル理論への移行に戸惑いをおぼえている向きも少なくない．そしてその主な原因は**確率過程**という概念についての理解やなじみの薄さにあるようである．

本書は数理ファイナンス理論における数学的基礎の整理と習得，応用のための入門書であることを目的としている．さらに言えば，連続的モデルの理論的基盤となっている**確率解析と確率微分方程式**について，数学の専門的素養をあらかじめ必要としない解説書であることを目指している．

本書の特徴は次の 2 点である；

まず上の考察に基づき，初等的確率論のまとめから入って，確率モデルの基礎となる諸概念，中でも確率過程の測度論的理解のためにできるだけ丁寧な入門的解説を与えていること．はじめの 3 章（第 1～3 章）はこのために割かれている．今ひとつ類書に見られない本書の特徴は，本論の解説の後で 2 章を割き，理論の実際的運用と発展的研究に関わる二つの重要な課題，**確率微分方程式の数値解法**と**非因果的確率解析**について入門的解説を与えていることである．言いかえれば本書は；**確率論のまとめ**（第 1～3 章），**本論**（**確率解析**）（第 4～6 章）および**発展的話題**（第 7，8 章）の 3 部から構成されており，このため当初の予定よりも紙数の多いものとなった．

数学を専門とされない読者は定法どおり第 1 部から読みはじめられるのがよろしいが，時間的余裕の乏しい方は，第 1 部を例えば必要に応じて参照する辞

書的部分として活用されればよく，また第 3 部は理論の実際的運用と今後の発展を窺う窓口として読まれればよいと思う．全体としてこの種の解説書としては少し固いものになったが，読者におかれては理論を自在に楽しむために不可欠の将来投資とみとめて下されば著者の望外の幸せである．なお，本書の準備過程では何度か原稿を書き上げては面白さの欠如が気に入らず，その都度破棄して書き直したため締め切り期限を何度か更新する羽目になったが，そうしたわがままを我慢し辛抱強くお付き合いして下さった朝倉書店編集部に心からの謝意を表するものです．また学習者としての感想や疑問点を聞かせてくれた立命館大学数理科学科の院生，三浦哲裕，澤井崇，若山剛士，林　賢一の諸氏にも謝意を表します．

2005 年 7 月，京都にて

小川重義

目　　次

1

確率空間と確率変数

本論に入る準備として本章と次章では確率論，確率過程論の基礎的事項を整理しておきたい．確率論の初歩的解説については本シリーズに他の一巻が当てられているが，本書の主題である確率解析論を展開する自然な枠組みとしては大なり小なり測度論的な把握が必要となるので，ここでは以後に使う用語や記号の導入も兼ねて測度論的概念のおさらいをしておく．本書の目的や紙数の都合で測度論そのものの解説をすることはもちろん適切でないが，独習用あるいはセミナー・テキストとして使用される読者の便宜を考慮して，抵抗感がないようできるだけ自足的な説明を試みるつもりである．しかし面倒な議論を好まない読者，あるいは先を急ぐ読者はここを跳ばして次章から読みはじめてもよい．

1.1 確 率 空 間

偶然現象の結果とその起こりやすさをあわせて表現する数学モデルは次の三つ組み $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ で記述される．すなわち，Ω は対象とする偶然現象の結果として起こりうる全ての根元的事柄を集めた集合であり，$\mathcal{F}$ は Ω の部分集合の集まり（集合族という）で次の 3 条件 (e1)～(e3) を満たすものとする．これを **σ-加法族**（あるいは σ-集合体）という．

(e1) $\Omega \in \mathcal{F}$

(e2) 部分集合 $A \subset \Omega$ が $A \in \mathcal{F}$ ならば，その補集合 $A^c = \{\omega \in \Omega; \omega \notin A\}$ についても $A^c \in \mathcal{F}$.

(e3) $\mathcal{F}$ の可算個の元 $\{A_n\}$ があれば，その和集合 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ も $\mathcal{F}$ に属する．

σ-加法族 $\mathcal{F}$ は可算回の集合演算に関して閉じている集合族であり，その要素を確率論では「事象」という（ルベーグ (Lebergue) 積分論では可測集合）．事象

$A \in \mathcal{F}$ の補集合 A^c を A の否定事象，事象列 $\{A_n\}$ の和集合 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ を和事象という．

練習 1.1　可算個の事象 $\{A_n\}$ の積 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ も事象である．実際，集合演算における公式（ドゥモルガン (De Morgan) の法則）より，

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left\{ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \right\}^c$$

これと条件の (e2),(e3) を組み合わせれば結論が出る．

練習 1.2　有限個の事象列 $\{A_k,\ 1 \leq k \leq n\}$ の和 $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ も事象である．実際，(e1),(e2) より，空集合 $\emptyset = \Omega^c \in \mathcal{F}$ であるから，$A_k = \emptyset\ (k \geq n+1)$ とおいた可算個の事象列 $\{A_k\}$ に条件 (e3) を適用すればよい．

三つ組みの最後の要素 P は確率であり，これは $\mathcal{F}$ の要素に $[0,1]$ 上の数値を対応させる集合関数で次の 2 条件 (p1),(p2) を満たすものとして定義される；

(p1)　全ての事象 A について $0 \leq P(A) \leq 1$ であり，特に，$P(\Omega) = 1$

(p2)　（σ **加法性**）排反事象系 $\{A_n\}$, $A_n \cap A_m = \emptyset\ (m \neq n)$ について，

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

が成り立つ．事象 A に対して $P(A)$ あるいは $P\{A\}$ などで事象 A の実現する確率を表すものとする．

命題 1.1　条件 (p2) は次の 2 条件 (p3-a), (p3-b) と同値である．

(p3-a) **(有限加法性)**　有限個の排反事象列 $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ について，

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

が成り立つ．

(p3-b) **(確率の連続性)** 事象列 $\{A_n\}$ が単調減少 $A_{n+1} \subset A_n$ で，$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ であれば，$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$ が成り立つ．

証明 実際，仮定 (p2) の下で $B_n = A_n \cap A_{n+1}^c$ とおけば，$\{B_n\}$ は排反事象列であり，仮定 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ より $A_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} B_k$ となっている．仮定 (p2) より，$P(A_n) = \sum_{k=n}^{\infty} P(B_k) \leq 1$．これより $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$ が従う．また有限加法性 (p3-a) は明らかである．逆に，(p3-a,b) の 2 条件を仮定する．$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ とおき，$B_n = A \cap (\bigcup_{k=1}^{n} A_k)^c = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ とおけば，$\{B_n\}$ は単調減少な事象列であり，明らかに $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$ である．したがって，仮定 (p3-a), (p3-b) より，$0 = \lim_{n\to\infty} P(B_n) = \lim_{n\to\infty}\{P(A) - P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k)\}$，となり結論を得る． □

定義 1.1 以上のような要素の三つ組み $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間という．

測度論の言葉で言えば，確率とは測度であり確率空間とは全空間の測度が 1 となる測度空間にすぎない．しかし，だからといって確率論が測度論の一部であるなどと錯覚してはいけない．確率論には数学としてばかりでなく，科学における方法論としての成長原理があるため，固有の奥深い数学理論を形成するに至っている．

1.1.1 確率空間の例

さて，集合 Ω のとり方と確率 P の与え方でさまざまな確率モデルができあがる．以下に典型的な例を見ておく．

例 1.1 サイコロの出目に関心がある場合，$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ であり，それぞれの出やすさは条件 $\sum_{k=1}^{6} p_k = 1 \quad (p_k \geq 0)$ を満たす非負数の組 $P = \{p_k, k = 1,2,\cdots,6\}$ で表される．すなわち，P(出目は k である) $= p_k$ $(1 \leq k \leq 6)$．この場合の σ 加法族は，$\mathcal{F} =$「Ω の全ての部分集合」(2^6 個ある）で構成される．

例 1.2　サイコロを N 回投げた場合，可能な出目の集合は

$$\Omega = \{(k_1, k_2, \cdots, k_N); 1 \leq k_1, k_2, \cdots, k_N \leq 6\}$$

である．「N 回のサイコロ投げの結果が $(k_1, k_2, \cdots, k_N)$ である」という基本的事象を $A(k_1, k_2, \cdots, k_N)$ と表すことにする．各基本事象 $A(k_1, k_2, \cdots, k_N)$ について非負の数 $p(k_1, k_2, \cdots, k_N) = P\{A(k_1, k_2, \cdots, k_N)\}$ をその事象の確率として，条件

$$\sum_{k_1, k_2, \cdots, k_N = 1}^{6} p(k_1, k_2, \cdots, k_N) = 1$$

が満たされるように適当に定めてやればよい．σ 加法族としては先の例と同様に，$\mathcal{F} =$“Ω の全ての部分集合”（2^{6^N} 個ある）ととれば，三つ組み $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ が N 回のサイコロ投げ実験を記述する確率空間となる．
このとき，任意の事象 $B \in \mathcal{F}$ の確率は次で与えられる．

$$P(B) = \sum_{A(k_1, k_2, \cdots, k_N) \subset B} p(k_1, k_2, \cdots, k_N)$$

例えば，今，$A_i(k)(1 \leq i \leq N, k = 1, 2, \cdots, 6)$ で「i 回目の出目は k である」という事象を表すものとすれば，上で扱った基本事象 $A(k_1, k_2, \cdots, k_N)$ は，$A(k_1, k_2, \cdots, k_N) = A_1(k_1) \cap A_2(k_2) \cap \cdots \cap A_N(k_N)$ で表される．複合的事象 $A_{i_1, i_2, \cdots, i_M}(k_1, k_2, \cdots, k_M) =$「$i_j (j = 1, \cdots, M)$ 回目の出目はそれぞれ k_j である」$(M \leq N)$ についても同様に，$A_{i_1, i_2, \cdots, i_M}(k_1, k_2, \cdots, k_M) = A_{i_1}(k_1) \cap A_{i_2}(k_2) \cap \cdots \cap A_{i_M}(k_M)$ と表されるが，次のようにも表される．

$$\begin{aligned} &A_{i_1, i_2, \cdots, i_M}(k_1, k_2, \cdots, k_M) \\ &= \bigcup_{l_1=1}^{6} \bigcup_{l_2=1}^{6} \cdots \bigcup_{l_{N-M}=1}^{6} A(l_1, l_2, \cdots, k_1, \cdots, k_M, \cdots, l_j, \cdots) \end{aligned}$$

ここで，$l_1, l_2, \cdots, l_{N-M}$ は $\{1, 2, \cdots, N\}$ から $\{i_1, i_2, \cdots, i_M\}$ を除いた残りの引数を表す，すなわち；$\{l_1, l_2, \cdots, l_{N-M}\} := \{1, 2, \cdots, N\} \cap \{i_1, i_2, \cdots i_M\}^c$ である．固定された $\{k_1, k_2, \cdots, k_M\}$ について，上式右辺に現れる基本事象系 $A(l_1, l_2, \cdots, k_1, \cdots, k_M, \cdots, l_j, \cdots)$ は排反であるから確率の公理 (p2) より，

その確率 $P\{A_{i_1,i_2,\cdots,i_M}(k_1,k_2,\cdots,k_M)\} = p_{i_1,i_2,\cdots,i_M}(k_1,k_2,\cdots,k_M)$ は次の関係式で与えられる．

$$p_{i_1,i_2,\cdots,i_M}(k_1,k_2,\cdots,k_M) = \sum_{l_1,l_2,\cdots,l_{N-M}=1}^{6} p(l_1,l_2,\cdots,k_1,\cdots,k_M,\cdots,l_j,\cdots) \qquad (1.1)$$

逆に言えば，部分的事象 $A_{i_1,i_2,\cdots,i_M}(k_1,k_2,\cdots,k_M)$ の実現確率として付与された数値 $p_{i_1,i_2,\cdots,i_M}(k_1,k_2,\cdots,k_M)$ と基本事象系 $\{A(k_1,k_2,\cdots,k_N)\}$ に与えられた確率 $\{p(k_1,k_2,\cdots,k_N)\}$ の間には常に上の関係式 (1.1) が成立している．これを確率系 $\{p_{i_1,i_2,\cdots,i_M}(k_1,k_2,\cdots,k_M)\}$ の**両立条件** (consistency condition) という．

例 1.3 もう少し一般的な場合を扱おう．1 から K までの番号を付けた K 面体のサイコロを果てしなく投げ続けることを考える．可能な結果は $E = \{1,2,\cdots,K\}$ の数が無限に続く数列 $\{a_n\}$ $(a_n \in E)$ である．このような数列全体の集合は $E^{\mathbf{N}}$ と表すが，これが今の場合の全集合 Ω となる．上の例と同様に $A_i(k)$ $(1 \le i < \infty,\ k = 1,2,\cdots,K)$ で「i 回目の出目は k である」という事象を表すものとしよう．任意の回数 n と任意の添え字の組 $\{i_1,i_2,\cdots,i_n\}$, $\{k_1,k_2,\cdots,k_n\}$ $(1 \le i_j \le n,\ 1 \le k_j \le K)$ に対応して定まる $A = A_{i_1}(k_1) \cap A_{i_2}(k_2) \cap \cdots \cap A_{i_n}(k_n)$ のような形の部分集合 A を考え，このような集合を全て含む最小の σ 集合体を $\mathcal{F}$ とする（すなわち，上のような形の集合の可算回の論理演算でできる集合は全て**事象**とする）．またこのような A の実現確率として，非負数 $p_{i_1,i_2,\cdots,i_n}(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ を次のように定めておく．

$$\sum_{k_1,k_2,\cdots,k_n=1}^{K} p_{i_1,i_2,\cdots,i_n}(k_1,k_2,\cdots,k_n) = 1$$

ここで与えた数値の組 $\{p_{i_1,i_2,\cdots,i_n}(k_1,k_2,\cdots,k_n)\}$ が前の例と同様に次の両立条件を満たしているとき，

$$p_{i_1,i_2,\cdots,i_M}(k_1,k_2,\cdots,k_M) = \sum_{l_1,l_2,\cdots,l_{N-M}=1}^{K} p(l_1,l_2,\cdots,k_1,\cdots,k_M,\cdots,l_j,\cdots)$$

この事象 A に対して,

$$P(A) = p_{i_1,i_2,\cdots,i_n}(k_1, k_2, \cdots, k_n)$$

となるような確率 $P(\cdot)$ が $(\Omega, \mathcal{F})$ 上に一意的に定まることが知られている（**コルモゴロフ** (Kolmogorov) **の拡張定理**).

試行の結果が連続的な値をとる現象に対する確率空間の例として次を挙げておく.

例 1.4 全空間が $\Omega = [a, b] \in R^1$ であるような場合, $\mathcal{F}$ の与え方に工夫が必要であり, 通常は半開区間 $(\alpha, \beta]$ の有限和で表される集合を全て含む最小の σ 加法族（あるいは集合体）をとる. $\Omega = \mathbf{R}$ である場合このような $\mathcal{F}$ をボレル集合体といい, 本書では $\mathcal{B}_{\mathbf{R}}$ と表すことにする. しかし面倒なことは抜きにして説明を続ければ, $P(\cdot)$ としては, $\int_a^b f(x)dx = 1$ となる非負値の関数を任意に与え, 事象 $A \in \mathcal{F}$ の実現確率を

$$P(A) = \int_a^b \mathbf{1}_A(x) f(x) dx$$

で定める. ここに, $\mathbf{1}_A(x)$ は集合 A の特性関数, すなわち

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \notin A) \end{cases}$$

最も簡単な場合, $([0,1], \mathcal{F}, dx)$ （すなわち, $\Omega = [0,1]$, $f(x) = 1$, $P(A) = A$ の「長さ」とする) を**ルベーグ空間**といい具体的な確率モデルを構成する場としてよく活用される.

1.1.2 事象列と確率

一般の確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ に戻り, 概念になれる練習も兼ねて, 無限事象列に関連する確率について簡単であるが重要な事柄を挙げておく.

任意の事象 $A, B \in \mathcal{F}$ について次式が成り立つ.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

実際，$A \cup B$ は次の三つの排反事象の和として表される．

$$A \cup B = (A \cap B^c) \cup (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$$

よって，

$$P(A \cup B) = P(A \cap B^c) + P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$$

一方，

$$P(A) = P(A \cap B^c) + P(A \cap B), \quad P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$$

が成り立ちこれより結論を得る．特に $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$ を知る．したがって，

補題 1.1　有限個の事象列 $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ について，不等式

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

が成り立つ．

証明は容易であるから読者にお任せする．

命題 1.1　無限事象列 $\{A_n\}$ について，次が成り立つ．

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \tag{1.2}$$

証明　任意の n について，補題 1.1 より，

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

事象列 $B_n := \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ は単調増大列であるから，確率の連続性公理 (p3-b) より，

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(B_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

となり命題は示された. □

可算無限個の事象列 $\{A_n, n \in \mathbf{N}\}$ $(A_n \in \mathcal{F})$ が与えられたとき，次のような事象を考え，

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k\ge n} A_k$$

これを事象列 $\{A_n\}$ の上極限といい，次で定まるものを下極限という.

$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k\ge n} A_k$$

上極限 $\limsup_{n\to\infty} A_n$ は $\{A_n\}$ のうち無限個が実現するという事象を，下極限 $\liminf_{n\to\infty} A_n$ は有限個の例外を除いて全てが（したがって，無限個が）実現するという事象である．当然，

$$\limsup_{n\to\infty} A_n \supset \liminf_{n\to\infty} A_n$$

が成り立つ．また，

$$\left\{\limsup_{n\to\infty} A_n\right\}^c = \liminf_{n\to\infty} A_n^c$$

が成り立つことも容易に確かめられる.

命題 1.2（ボレル–カンテリ (Borel-Cantelli) の第 1 補題）　無限事象列 $\{A_n\}$ について，

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$$

であるならば，

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 0, \quad \text{すなわち} \quad P\left(\liminf_{n\to\infty} A_n^c\right) = 1$$

が成り立つ.

証明 $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ とおくと，命題 1.1 より，$P(B_n) \leq \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k)$. ところが $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ であったから，

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(B_n) = 0$$

となる. □

1.2 確 率 変 数

サイコロの出目や賭け事による利得，特定の時点における株価，あるいは物理量の測定値などのように不確定（確率的）現象に依存して値の定まる数値（あるいは変量）を**確率変数**（あるいは確率変量）という. 以下簡単のために実数値をとる確率変数について説明する.

定義 1.2 (1) 確率変数とは確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で定義された実数値関数 $X(\omega), (\omega \in \Omega)$ であり次の条件を満たすものをいう；

$$\text{任意の } x \in R^1 \text{ に対して，} \{\omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F} \tag{1.3}$$

(2) $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ で定義された $\mathbf{R}^n$ 値関数 $\mathbf{X}(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), \cdots, X_n(\omega))$ が $\mathbf{R}^n$ 確率変数であるとは，各成分 $X_k(\omega), (1 \leq k \leq n)$ が実数値確率変数であることをいう，すなわち；

$$^{\forall}\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n \text{ に対して，}$$
$$\{\omega : X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \cdots X_n \leq x_n\} \in \mathcal{F}$$

測度論の言葉でいえば，確率変数とは確率空間上の可測関数のことである. これがどの程度の広さを持つ概念であるかを見るために，以下に基本的な命題を証明なしに挙げておこう.

練習 1.3 確率変数については次の事柄が成立する；

(rv1) 上の条件 (1.3) は次と同値である.

任意の $A \in \mathcal{B}_{\mathbf{R}}$ に対して，$X^{-1}(A) := \{\omega : X(\omega) \in A\} \in \mathcal{F}$. したがっ

て，確率変数 X と（ボレル）可測関数 $\varphi(x)$ の合成関数 $Y(\omega)=\varphi(X(\omega))$ も確率変数であることがわかる．

(rv2) 同様に，n 次元確率変数 $\mathbf{X}$ と，n 変数可測関数 $\varphi(\mathbf{x})$ との合成関数 $Y(\omega)=\varphi(\mathbf{X}(\omega))$ も確率変数になる．

(rv3) 連続関数は可測関数であるから例えば，aX (a: 定数), X^n, $|X|$, $(X(\omega)-K)_+=\max\{X-K,0\}$, ($K=$ 定数), e^X, $X+Y$, $X\cdot Y$ などは全て確率変数である．

(rv4) $(\Omega,\mathcal{F},P)$ で定義された確率変数列 $\{X_n\}$ が $n\to\infty$ で**収束する**という事柄 A は事象である（すなわち，$P(A)$ を考えることができる）．
実際，$A=\{\omega;$ 列 $\{X_n(\omega)\}$ がコーシー (Cauchy) 列になる $\}$ であるから，上の結果 (rv-2) と次の翻訳式より明らかであろう．

$$A=\bigcap_N\bigcup_n\bigcap_{l,m>n}\left\{\omega:|X_l(\omega)-X_m(\omega)|\le\frac{1}{N}\right\}$$

したがって，

(rv5) 同一確率空間で定義された確率変数列 $\{X_n\}$ の各点収束極限，

$$X^\infty(\omega)=\begin{cases}\lim_{n\to\infty}X_n(\omega) & (\omega\in A)\\ \text{任意の実定数} & (\omega\notin A)\end{cases}$$

として定まる量 $X^\infty(\omega)$ も確率変数である．

註 1.1 最後の事実 (rv5) は，測度論では「可測関数列の各点収束極限は可測関数である」として衆知の事柄であろう．

定義 1.3 実数値確率変数 X に対して，$F_X(x)=P\{\omega:X(\omega)\le x\}$, $x\in\mathbf{R}$ で定まる関数を X の分布関数という．

命題 1.2 分布関数は次の性質を持つ．

(d1) $0\le F_X(x)\le 1$

(d2) 単調増大である； $F_X(x)\le F_X(y)$ $^\forall x\le y$. 特に，$\lim_{x\to\infty}F_X(x)=1$, $\lim_{x\to-\infty}F_X(x)=0$ 実際， $F_X(y)-F_X(x)=P\{x<X\le y\}\ge 0$

(d3) 右連続である； $\lim_{h\to+0}F_X(x+h)=F_X(x)\ \ ^\forall x$

実際，$\{h_n\}$ を $\lim_{n\to 0}h_n=0$ である任意の単調減少列として，確率の連続性 (p3-b) より，

$$\lim_{n\to 0}F_X(x+h_n)-F_X(x)=\lim_{n\to 0}P(X\in(x,x+h_n])$$
$$=P\left(X\in\bigcap_n(x,x+h_n]\right)=P(X\in\emptyset)=0$$

を得る．

$\mathbf{R}^1$ の開区間を全て含む最小の σ-加法族を $\mathcal{B}_{\mathbf{R}}$ と表すことにしていた．確率変数 X は次の関係式，

$$\mu_X(A)=PX^{-1}(A)=\int_A dF_X(x),\quad A\in\mathcal{B}_R$$

によって，可測空間 $(\mathbf{R}^1,\mathcal{B}_{\mathbf{R}})$ 上に確率測度 $\mu_X(\cdot)$ を導くことがわかる．

確率変数から離れて，一般に (d1)～(d3) を満たすものを分布関数という．分布関数が導関数を持つ場合，$f_X(x)=(d/dx)F_X(x)$ を（X の）確率（分布）密度関数といい，*pdf* と記すこともある．

練習 1.4 容易にわかるように確率密度関数は次の性質を持つ．

$$f_X(x)\geq 0,\qquad \int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)dx=1$$

註 1.2 分布関数 $F(x)$ は次の三つの型に分類される；

(ac) ； $F(x)$ が *pdf* を持つ場合 （絶対連続）

(d) ； $F(x)$ が階段関数である場合 （純粋不連続）

(sc) ； $F(x)$ は連続であるが微分を持たない （特異連続）

$F(x)$ が純粋不連続であるとは，対応する確率変数の実現値集合が離散的（とびとびの値しかとらない）ということである．一般に分布関数 $F(x)$ は次の形に分解されることが知られている（ルベーグの分解定理）；

$$F(X) = \alpha F_{\rm ac}(x) + \beta F_d(x) + \gamma F_{\rm sc}(x) \quad (\alpha, \beta, \gamma \geq 0,\ \ \alpha + \beta + \gamma = 1)$$

ここに，$F_{\rm ac}$，$F_{\rm d}$，$F_{\rm sc}$ はそれぞれ (ac), (d), (sc) 型の分布関数である．

代表的な分布関数の例を以下に挙げておく．また便利な記法として「確率変数 X が分布 Φ に従う」という事柄を，$X \sim \Phi$ と表すことにする．

例 1.5（δ 分布） 確率変数 X が δ_a 分布（a は定数）に従うとは，

$$F_X(x) = 1 \quad (x \geq a), \ \ = 0 \quad (x < a)$$

すなわち，$P(X = a) = 1$ (X は定数 a) であることを意味する．

例 1.6（二項分布 $B(n,p)$） 確率変数 X が二項分布 $B(n,p)$, ($0 < p < 1$, $n \in \mathbf{N}$) に従うとは；$X \in \{0, 1, 2, \cdots, n\}$ であり，

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad (0 \leq k \leq n)$$

を意味する．表の出る確率が p であるような銅貨を n 回投げたとき，そのうちで表の出た回数という確率変数はこの分布に従う．

例 1.7（ポアソン分布） 確率変数 $X \sim$ ポアソン (Poisson) 分布 P_λ (λ は正定数）とは；
$X \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ であり，各値の実現確率が

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \qquad (k \in \mathbf{N} \cup \{0\})$$

で与えられることをいう．X $B(n,p)$ であって，n が十分に大きく，p が十分に小さくて $np = \lambda$（一定）であるような場合，X は近似的にポアソン分布 P_λ に従うことが簡単な考察でわかる（附録 9.1「ポアソンの少数法則」参照）．

連続な確率変数の代表的な例も与えておく．

例 1.8（一様分布） 分布密度関数 $f_X(x)$ が次のものであるとき，X は区間 $[a,b]$ 上の一様分布に従うといい，$X \sim U([a,b])$ と表す．

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \quad (a \le x < b), \quad = 0 \quad (x < a,\ x \ge b)$$

$[a,b] = [0,1]$ であるときは，単に一様分布という．数値計算法の章（第 8 章）でもふれるが，計算機言語に付属している乱数発生プログラムはこの $U([0,1])$ の実現値と見なせる**ランダム**な数列を発生させるものである．一般の分布に従う乱数はこれを適当に加工して発生させるのである．

例 1.9（正規分布 $N(m,\sigma^2)$）　分布密度関数が

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\} \qquad (x \in \mathbf{R}^1)$$

$(m \in \mathbf{R}^1,\ \sigma \ge 0)$ で与えられる分布を**平均 m，分散 σ^2 の正規分布**（あるいは**ガウス (Gauss) 分布**）という．σ を**標準偏差**という．特に，$N(0,1)$ を標準正規分布という．

例 1.10（指数分布 Exp_λ）　分布密度関数が次で与えられる分布である．ただし $(\lambda > 0)$

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (x \ge 0), \quad = 0 \quad (x < 0)$$

指数分布は記憶のない分布ともいわれる（例えば，文献 1) を参照）．

1.3　多 次 元 分 布

多次元の確率変数に対しても分布関数が同様に定義される；R^n 値確率変数 $\mathbf{X}(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), \cdots, X_n(\omega))$ に対応して次で定まる n 変数実数値関数を $\mathbf{X}$ の (n 次元) **同時分布関数**という．

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \cdots, x_n) := P\{X_i \le x_i,\ 1 \le i \le n\}, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n \tag{1.4}$$

1 次元の場合と同様に，微分

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n} F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

が存在すれば，これを $\mathbf{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ の同時分布密度関数（あるいは，n 次元 pdf）という．次の性質を持つ；

$$f_{\mathbf{X}}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geq 0,\quad \int_{R^n} f_{\mathbf{X}}(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n=1$$

n 次元確率変数 $\mathbf{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ の同時分布関数 $F_{\mathbf{X}}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ において，$x_{k+1},x_{k+2},\cdots,x_n \longrightarrow \infty$ の極限をとれば，k 次元の分布関数 $F_{\mathbf{X}}(x_1,\cdots,x_k,\infty,\cdots,\infty)$ が得られるが，定義式（1.4）よりこれは $P\{X_1\leq x_1,\cdots,X_k\leq x_k\}$, すなわち k 次元確率変数 $(X_1,X_2,\cdots,X_k)$ の分布関数であることがわかる．これを $(X_1,X_2,\cdots,X_k)$ の周辺分布関数という．例えば，1 次元の周辺分布関数 $F_{\mathbf{X}}(\infty,\cdots,x_k,\infty,\cdots,\infty)$ は確率変数 X_k の分布関数にほかならない．確率分布密度関数についても同様の用語を使うことにする．

例 1.11　多次元分布の重要な例として n 次元正規分布を取り上げておこう．$G=\{\gamma_{ij},1\leq i,j\leq n\}$ を n 次対称正定値行列とし，$\mathbf{m}=(m_1,m_2,\cdots,m_n)$ を n 次元実ベクトルとする．このとき，

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n|G|}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{m})G^{-1}\,{}^t(\mathbf{x}-\mathbf{m})\right\}$$
$$\mathbf{x}={}^t(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n \tag{1.5}$$

とおけば，$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ は n 次元確率分布密度関数になっている，ただし ${}^t\mathbf{x}$ は $\mathbf{x}$ の転置ベクトル（今の場合は，n 次元列ベクトル）を表す．$|G|=det\{G\}$ は G の行列式である．これが多次元分布密度関数であることは，$\int_{R^n} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}=1$ を確かめてみればわかる．$\mathbf{X}$ が上の f を同時分布密度関数に持つとき，$\mathbf{X}$ は n 次元正規確率変数である（あるいは確率変数の組 $\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ は結合的に正規である）という．このとき，$\mathbf{m}$ を $\mathbf{X}$ の期待値ベクトル，G を共分散行列という．

また X_k の分布密度関数は元の多次元分布の周辺密度関数を求めればよい．

$$f_k(x_k)=\int_{\mathbf{R}^{n-1}} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})dx_1dx_2\cdots dx_{k-1}dx_{k+1}\cdots dx_n$$

を計算すれば，

$$f_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma_{kk}}} \exp\left\{-\frac{(x-m_k)^2}{2\gamma_{kk}}\right\}$$

すなわち，$X_k \sim N(m_k, \gamma_{kk})$ であることがわかる．

1.4 期 待 値

確率変数 $X(\omega)$ とは測度空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ で定義された実数値可測関数であるから，測度 $P(\cdot)$ に関するルベーグ積分値 $\int_\Omega X(\omega)dP$ を考えることができる．これを確率論では期待値（あるいは平均値）ともいう．

1.4.1 導 入 手 順

簡単に復習すれば；

(1) $X(\omega)$ が階段関数であるとき，すなわち有限個の可測集合 $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ と実数の組 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ があって，$\Omega = \bigcup_{k=1}^n A_k$，$A_i \cap A_j = \phi \ (i \neq j)$ かつ，$X(\omega) = \sum_{k=1}^n a_k \mathbf{1}(\omega)_{A_k}$ と表される場合は，

$$E[X] = \sum_{k=1}^n a_k P(A_k)$$

と定義する．$P(A_k) = P(X = a_k)$ でもあるから，$E[X] = \sum_{k=1}^n a_k P(X = a_k)$ とも書ける．作り方より期待値を求める計算は線形演算であることがわかる，すなわち；X, Y を上のような階段関数とすれば，任意の実数 a, b に対して次の等式が成り立つ，

$$E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$$

(2) $X(\omega)$ が非負で有界（$0 \leq X \leq {}^\exists M$）である場合，単調増大な階段関数列 $\{X_n\}$ で各 ω ごとに $X(\omega)$ に収束するものがとれることに注意する．例えば，

$$X_n(\omega) = \sum_{k=1}^{nM} \frac{k-1}{n} \mathbf{1}_{A_k}(\omega), \quad A_k = \left\{\omega \middle| \frac{k-1}{n} \leq X(\omega) < \frac{k}{n}\right\}$$

ととればよい．このとき数列 $E[X_n](\leq M)$ は単調増大列であるから極限値が存在し，さらにその値は近似列 $\{X_n\}$ のとり方に関係しないことがわかるので，

$$E[X] = \lim_{n\to\infty} E[X_n]$$

と定義する．

(3)　X が単に非負である場合は，$X^M = \min\{X, M\}$ とおけば，これは有界であるから上の手順 (2) に従って期待値 $E[X^M]$ を与えることができる．数列 $E\{X^M\}$ は M について単調増大であるから，無限大まで込めれば収束することがわかる．よってこの場合は，

$$E[X] := \lim_{M\to\infty} E[X^M] \ (\leq \infty)$$

で期待値を定義する．このような確率変数に対して期待値をとる計算は (1) におけると同様，やはり線形演算であることに注意しておく．

(4)　一般の確率変数の場合は，$X = X^+ - X^-$，$X^+ = \max\{X, 0\}$，$X^- = \max\{-X, 0\}$ と分解すれば，各 X^+, X^- は非負の確率変数であるから，(3) の手順に従いそれぞれに $E[X^\pm]$ が定義される．よって，期待値演算の線形性より以下に示す定義 (1.4) にたどり着く．

定義 1.4　$E[|X|] = E[X^+] + E[X^-] = \int_\Omega |X(\omega)|dP < \infty$ であるとき，X は積分可能であるといい，積分値

$$\int_\Omega X(\omega)dP := E[X^+] - E[X^-]$$

を X の**期待値**（あるいは平均値）という．本書では X の期待値を $E[X]$ といった記号で表すことにする．

註 1.3 期待値は確率 P に関する積分値であるから，確率 P が変われば値も変わる．確率の議論ではしばしば，どの確率についての積分値であるかを明示する必要のある場面が出てくる．そういう場合は，X の確率 P なり Q に関する期待値を $E^P[X]$ や $E^Q[X]$ といった記号で表すようにする．

1.4.2 分布関数による表現

期待値を定める演算は抽象的な空間 Ω の上での積分であるが，X の分布関数 $F_X(x)$ を使えば，なじみの空間 $\mathbf{R}^1$ とか $\mathbf{R}^n$ の上の具体的な積分として表すことができる．すなわち，$\int_{-\infty}^{\infty} |x|\, dF_X(x) < \infty$ であるとき，

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, dF_X(x)$$

が成り立つ．ここに $\int dF_X(x)$ は $F_X(x)$ に関するルベーグ–スティールチェス (Stieltjes) 積分である（附録 9.6 参照）．ただ，$F_X(x)$ が分布密度関数 $f_X(x) = (\partial/\partial x)F_X(x)$ を持つときは，

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

と表されることを注意しておこう．また証明は省くが次に示す結果も基本的である．

定理 1.1　(1) 任意の確率変数 X と任意の連続関数 $g(x)$ から合成される確率変数 $Y = g(X)$ は $\int_{\mathbf{R}} |g(x)| dF_X(x) < \infty$ であるとき期待値を持ち，次式が成立する．

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, dF_X(x)$$

(2) n 次元確率変数 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ と n 変数の連続関数 $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ とで合成される確率変数 $Y = g(X_1, X_2, \cdot x, X_n)$ についても同様で，

$$\int_{R^n} |g(x_1, x_2, \cdots, x_n)| F_{\mathbf{X}}(dx_1, dx_2, \cdots, dx_n) < \infty$$

であるとき，Y は期待値を持ち，次で与えられる．

$$E[Y] = \int_{R^n} g(x_1, x_2, \cdots, x_n) F_{\mathbf{X}}(dx_1, dx_2, \cdots, dx_n)$$

1.4.3 期待値の性質

以後の議論の便宜のために期待値の基本的な性質を証明なしに示しておく．

定理 1.2 期待値をとる計算は線形演算である．X, Y を可積分な確率変数とすれば，任意の定数 α, β について次が成り立つ．

$$E[\alpha X + \beta Y] = \alpha E[X] + \beta E[Y]$$

例 1.12 X について $E|X-a|^\alpha$ が存在すれば，これを a の周りの α 次モーメントという．特に，$\alpha = 2$, $a = E[X]$ のとき，すなわち $E[(X-E[X])^2]$ が存在すれば，それを $\mathrm{Var}(X)$ と記し X の**分散**という．容易にわかるように，$\mathrm{Var}(X) = E[X^2 - 2X \cdot E[X] + (E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2$ である．分散は X の分布関数の広がり具合を表す目安となる．例えば，

補題 1.2

$$P(|X - E[X]| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\epsilon^2}$$

が成り立つ．これを**チェビシェフ** (Chebyshev) **の不等式**という．

証明 任意に固定した正数 ϵ に対して，$A = \{\omega | |X - E[X]| \geq \epsilon\}$ とおく．

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\, X &:= E[(X-E[X])^2] = E[(X-E[X])^2; A] + E[(X-E[X])^2; A^c] \\
&\geq E[(X-E[X])^2; A] \geq \epsilon^2 E[\mathbf{1}_A] \\
&= \epsilon^2 P(A)
\end{aligned}$$

より明らかである． □

チェビシェフの不等式で $\epsilon = 2\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$ ととれば，どのような確率変数についても

$$P(|X - E[X]| \geq 2\sqrt{\mathrm{Var}(X)}) \leq \frac{1}{4}$$

であるが，X が正規分布 $N(m, \sigma^2)$, $m = E[X], \sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$ に従う場合は，

$$P(|X - E[X]| \geq 2\sqrt{\mathrm{Var}(X)}) \leq \frac{23}{500}$$

であることが標準正規分布 $N(0,1)$ の数表よりわかる．すなわち正規分布の密度関数の形は期待値 $E[X]$ の周りに比較的によくまとまっていることがわかる．

次の結果はシュワルツ (Schwartz) の不等式の一般化であるが，モーメントの存在判定に際して有用である．

補題 1.3（ヘルダー（Hölder）の不等式） $1 < p, q,\ 1 = 1/p + 1/q$ について次の不等式が成り立つ，

$$E[XY] \le \{E|X|^p\}^{1/p}\{E|Y|^q\}^{1/q}. \tag{1.6}$$

証明　$E|X|^p,\ E|Y|^q < \infty$ である場合について示しておく．
任意の正数 x, y について次の不等式が成り立つことはよく知られている；

$$\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \ge xy$$

ここで，$x = |X|/\{E|X|^p\}^{1/p},\ y = |Y|/\{|Y|^q\}^{1/q}$ とおけば，

$$\frac{1}{p}\frac{|X|^p}{E[|X|^p]} + \frac{1}{q}\frac{|Y|^q}{E[|Y|^q]} \le |XY|$$

となる．両辺の期待値をとり整理すれば求める不等式が得られる．　□

これより直ちに次の結果が得られる．

定理 1.3　$t \ge s > 0$ について，$\{E|X|^s\}^{1/s} \le \{E|X|^t\}^{1/t}$ が成り立つ．このことを，X の L^p-ノルム $||X||_p = \{E|X|^p\}^{1/p}$ は $p\ (>0)$ について単調増大であるという．

実際，$r = t/s$ とおけば $r > 1$．r' を $1/r + 1/r' = 1$ と定め，$Y = |X|^s$, 1 にヘルダーの不等式を適用すれば，

$$E|Y| = E|Y \cdot 1| \le \{E|Y|^r\}^{1/r}\{E1^{r'}\}^{1/r'}$$

これより，$E[|X|^s]^{t/s} \le E[|X|^t]$ を得る．

註 1.4 したがって，ある $t > 0$ について $E|X|^t < \infty$ ならば，$0 < s \le t$ である任意の正数 s について，$E|X|^s < \infty$ が成り立つ．

ところで，関数 $\varphi(x)$, $x \in \mathbf{R}^1$ は，任意の $x, y \in [a,b] \subset \mathbf{R}^1$ と任意の $0 \le \theta \le 1$ について次の条件を満たすとき区間 $[a,b]$ 上で凸関数であるという；

$$\varphi(\theta x + (1-\theta)y) \le \theta\varphi(x) + (1-\theta)\varphi(y)$$

註 1.5　$\varphi(x)$ が微分可能である場合，$\varphi(x)$ が凸であるとは $\varphi'(x)$ が単調増大関数であることを意味している．したがって，特に $\varphi''(x) > 0$ であれば $\varphi(x)$ は凸関数である．

期待値の評価について次の事柄もよく利用されるところである．

補題 1.4（イェンゼン (yensen) の不等式）　X を期待値を持つ確率変数とし，$\varphi(x)$ を凸関数で $E[|\varphi(X)|] < \infty$ あるものとする．次の不等式が成り立つ；

$$\varphi(E[X]) \le E[\varphi(X)]$$

証明　$\varphi(x)$ が微分可能である場合について示しておく．上の註 1.5 と平均値の定理とを組み合わせれば，任意の点 x_0, x に対して定数 $^{\exists}\theta \in (0,1)$ となり，次式の成り立つことがわかる．

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0) \ge \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x - x_0)$$

上の式で $x_0 = E[X]$, $x = X$ とおき，両辺の期待値をとれば目的の不等式が得られる．　□

例 1.13（相関係数）　二つの確率変数 X, Y がそれぞれ 2 次の期待値を持てば ($E[X^2], E[Y^2] < \infty$)，それぞれ期待値を持ち

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$$

も定まる．これを X, Y の**共分散**という．シュワルツの不等式より，$|\mathrm{Cov}(X,Y)| \le \sqrt{\mathrm{Var}(X)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}$ であることがわかる．一方，

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}}$$

で定まる値 ρ を X, Y の**相関係数**という．常に $|\rho| \leq 1$ である．特に $\rho = 0$ であるとき，X, Y は**無相関**であるという．

次の結果はよく使われる．

命題 1.3　$\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ を互いに無相関な確率変数とする，すなわち；$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0$ $(i \neq j)$. このとき和 $\sum_{k=1}^n X_k$ の分散について次の等式が成り立つ．

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n \mathrm{Var}(X_k)$$

証明　$E\sum_{k=1}^n X_k = \sum_{k=1}^n E[X_k]$ であるから，一般に

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = E\left\{\sum_{k=1}^n (X_k - E[X_k])^2 + 2\sum_{i>j}(X_i - E[X_i])(X_j - E[X_j])\right\}$$

$$= \sum_{k=1}^n \mathrm{Var}(X_k) + 2\sum_{i>j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

となり，これより直ちに結論を得る．　□

1.4.4　確率変数列の極限と期待値

確率変数列の収束性に関する概念を整理しておく．

(0)　確率変数列 $\{X_n(\omega)\}$ が $n \longrightarrow \infty$ である確率変数 $X(\omega)$ に収束するという事柄 A は可測事象（$A \in \mathcal{F}$）であった．

(1)　$P(A) = 1$ であるとき，$\{X_n\}$ は X に概収束（あるいは，確率 1 で収束）するといい，$\lim_{n\to\infty} X_n = X$ $(P - a.s.)$ とも表す．"a.s." は almost surely の略記であるが，別に "a.e." と記すこともある．

(2)　任意の正数 ϵ に対して，$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0$ であるとき，$\{X_n\}$ は X に確率収束するといい，記号 $\lim_{n\to\infty} X_n = X$　(in P) と表す．概収束すれば確率収束するが，一般に逆は正しくない．

(3)　$p \geq 1$ に対して，$\lim_{n\to\infty} E[|X_n - X|^p] = 0$ が成り立つとき，$\{X_n\}$ は X に p 次平均収束するといい，$\lim_{n\to\infty} X_n = X \quad (\text{in } L^p)$ と表す．特に $p = 2$ のときは，$\text{l.i.m}_{n\to\infty} X_n = X$ とも記すことがある（註 4.3 参照）．$p(\geq 1)$ 次平均収束すれば確率収束であることはチェビシェフの不等式の応用により簡単にわかるが，逆は一般に正しくないしまた概収束するとも限らない．

(4)　確率変数 X の L^p-ノルム $||X||_p = E[|X|^p]^{1/p}$ の単調増大性（既出，定理 1.3）より，p 次平均収束すれば $p > q$ について q 次平均収束することがわかる．

(5)　X_n の分布関数 $F_n(x)$ が X の分布関数 $F_X(x)$ に，$F_X(x)$ の連続点において収束するとき，X_n は X に法則収束する（あるいは，分布の意味で収束する）といい，$X_n \longrightarrow X \quad (\text{in law})$ と表す．$\{X_n\}$ が同一の確率空間で定義されている場合；概収束，確率収束，平均収束は法則収束を導く．

ところで，各 X_n が期待値 $E[X_n]$ を持つとき，極限 $X = \lim X_n$ は期待値を持つであろうか？

定義 1.5　列 $\{X_n\}$ は次の条件を満たすとき**一様可積分**であるという．

$$\lim_{a\to\infty} \sup_n E[|X_n|; |X_n| \geq a] = \lim_{a\to\infty} \sup_n \int_{|X_n|\geq a} |X_n|\, dP = 0 \qquad (1.7)$$

註 1.6　$\{X_n\}$ が一様可積分ならば，$\sup_n E[|X_n|] < \infty$ が成り立つことを注意しておく．証明は各自試みてみられたい．

例 1.14　列 $\{X_n\}$ が可積分な確率変数 $Y(\omega)$ によって，$|X_n| \leq Y(\omega)(a.e.)$ と上から押さえられるとき，$\{X_n\}$ は一様可積分である．

実際，$\{\omega; |X_n(\omega)| \geq a\} \subset \{\omega; Y(\omega) \geq a\}$ であるから，

$$E[|X_n|; |X_n| \geq a] \leq E[|X_n|; Y \geq a] \leq E[Y; Y \geq a]$$

である．Y は可積分なので $\lim_{a\to\infty} E[Y; Y \geq a] = 0$，よって結論を得る．

定理 1.4　$\{X_n\}$ が一様可積分で，ある確率変数 X について，$P(\lim_{n\to\infty} X_n = X) = 1$ となっていれば，X も可積分で $\lim_{n\to\infty} E[X_n] = E[X]$ が成り立つ．

これと上の例（1.14）を組み合わせれば次の定理が得られる．

定理 1.5（ルベーグの有界収束定理）　列 $\{X_n\}$ が確率変数 X に確率 1 で収束し，かつ可積分な Y があって $P(|X_n| \leq Y) = 1$ となっているとき，$\lim_{n\to\infty} E[X_n] = E[X]$ が成り立つ．

1.4.5　特性関数，確率母関数

例 1.15　どのような確率変数 X についても次式で定義される関数は存在するが，

$$\varphi_X(\theta) = E[e^{i\theta X}] \quad (\theta \in \mathbf{R^1})$$

これを X の**特性関数**という．分布関数で表せば，

$$\varphi_X(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta x} dF_X(x)$$

もし，分布密度関数があれば，

$$\varphi_X(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\theta x} f_X(x) dx$$

すなわち，$\varphi_X(\theta)$ は $f_X(x)$ のフーリエ (Fourier) 変換である．したがって，逆変換公式より，

$$f_X(x) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_X(\theta) e^{-i\theta x} d\theta$$

あるいは，

$$F_X(x) - F_X(y) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_X(\theta) \frac{e^{-i\theta x} - e^{-i\theta y}}{i\theta} d\theta$$

言いかえれば特性関数を知ることは分布関数を知ることに等しい．

確率変数列 $\{X_n\}$ はその分布関数列 $\{F_n(x)\}$ がある確率変数 X の分布関数 $F_X(x)$ に（$F_X(x)$ の連続点で）収束するとき，X に法則収束するという．法則収束に関する次の定理は大変有用である．

定理 1.6　特性関数の列，$\varphi_n(\theta) = E[e^{iX_n\theta}]$ が原点を含む θ の開区間で極限 $\varphi(\theta)$ に一様収束するとき，$\varphi(\theta)$ はある確率変数 X の特性関数であり，$\{X_n\}$ はこの X に法則収束する．

例 1.16　X を自然数値をとる確率変数とする．θ $(|\theta| < 1)$ に対して次式で与えられる関数を X の**確率母関数**という．

$$\psi(\theta) = E[\theta^X] = \sum_{n=0}^{\infty} \theta^n P(X = n)$$

容易にわかるように次の関係式

$$P(X = n) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\theta^n}\psi(\theta)\Big|_{\theta=0}$$

が成り立ち，確率の計算に便利な道具である．

1.5 条件付き確率

52 枚のトランプから無作為に抜き出したカードがハートのエースであるという事象を A としよう．$P(A) = 1/52$ である．ところで，引いたカードを見る前にそのスーツが赤色であることがかいま見えたとすれば，それがハートのエースである確率は 1/26 と変化する．このような確率の概念を**条件付き確率**といい $P(A|B)$ で表す，ただし B は「引いたカードが赤い」という事象である．経験的な確率の概念は**頻度**を理想化したものであったことを思いおこせば，条件付き確率は次のように与えるのが合理的であることがわかる．

定義 1.6　二つの事象 A, $B \in \mathcal{F}$ について，$P(B) > 0$ であるとき，事象 A の B に関する条件付き確率 $P(A|B)$ は次で与えられる．

$$P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$$

定義より，

$$P(AB) = P(A|B)P(B)$$

であることに注意しておこう．また $P(B)=0$ である場合は定義されていないが，場合に応じて適当な値を指定してかまわないこともある．

練習 1.5　$P(A) \geq P(B) > 0$ ならば，$P(A|B) \geq P(B|A)$ である．

証明　実際，$P(AB) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$ より，

$$\frac{P(A|B)}{P(B|A)} = \frac{P(A)}{P(B)} \geq 1$$

□

練習 1.6　2 個のサイコロを振り，出た目を X, Y, $A = \{X+Y = 6 \text{ 以下の偶数}\}$ とすれば $P(A) = 9/36 = 1/4$ である．一つの出目 X の値が 3 以下であることがわかっている場合に和が 6 以下の偶数になる確率は，$B = \{X \leq 3\}$ として $P(A|B)$ で求められる．今の場合，$P(B) = 3/6 = 1/2$, $AB = \{(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3)\}$ であるから $P(AB) = 7/36$. したがって，

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{7/36}{1/2} = \frac{7}{18} > \frac{1}{4} = P(A)$$

となる．

条件付き確率 $P(A|B)$ は B を固定すれば，事象 A の関数として確率であるための二つの性質（前掲，(p1),(p2)）を持っていることが容易にわかる，

(cp1)　全ての事象 A について $0 \leq P(A|B) \leq 1$ であり，特に，$P(\Omega|B) = 1$

(cp2)（**σ 加法性**）　排反事象系 $\{A_n\}$，$A_n \cap A_m = \emptyset$ $(m \neq n)$　について，$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n|B) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n|B)$　が成り立つ．

すなわち $P(\cdot|B)$ 自体が確率となっている．

問 1.1　上の二つの条件 (cp1)，(cp2) が成り立つことを検証せよ．

例 1.17　「イ」,「ロ」二つの箱がある．「イ」には赤玉が 3 個，白玉が 7 個入っており,「ロ」には赤玉 8 個，白玉 2 個が入っているとする．二つの箱を無作為

に選び，そこから無作為に玉を1個取り出したとき，それが赤玉である確率を求めてみる．

解 それが赤玉であるという事象を A としよう．選ばれた箱が「イ」「ロ」であるという事象をそれぞれ B_1, B_2 で表すことにすれば，$B_1 \cup B_2 = \Omega$ であるから，

$$P(A) = P(A \cap \Omega) = P(AB_1) + P(AB_2) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2)$$

今の場合，$P(B_1) = P(B_2) = 1/2$, であり $P(A|B_1) = 3/10$, $P(A|B_2) = 8/10$ であるから，$P(A) = 1/2(3/10 + 6/10) = 11/20$ となる．

上の問題の逆を考えてみよう．取り出した玉が赤玉であった $(= A)$ とき，その玉はどちらの箱から取り出したものであると判断するのが妥当であろうか？

この問題に答えるには，条件付き確率 $P(B_1|A)$, $P(B_2|A)$ を求めて比較すればよい．これらは「A, 結果」から「B_1, B_2, 原因」の蓋然性を推定するものであり，次の定理は原因確率の求め方を教えてくれるもので**ベイズの公式**ともいう．

定理 1.7 $\{B_1, B_2, \cdots, B_n\}(B_i \in \mathcal{F})$ を Ω の分割とする，すなわち，$B_i \cap B_j = \varphi(i \neq j)$ かつ $\bigcup_{k=1}^{n} B_k = \Omega$ で $P(B_i) > 0 \quad (1 \leq i \leq n)$ とする．次の公式が成り立つ．

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A|B_k)P(B_k)} \qquad (1 \leq i \leq n)$$

例 1.18 上の例 1.17 について，結果 $A =$「赤玉を引いた」の原因確率を求めてみよう．

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2)} = \frac{\frac{3}{10}\frac{1}{2}}{\frac{3}{10}\frac{1}{2} + \frac{8}{10}\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{11}{10}} = \frac{3}{11}$$

よって，

$$P(B_2|A) = 1 - P(B_1|A) = \frac{8}{11}$$

したがって赤玉を引いたなら，それは「ロ」の箱から引いたと判断するのが妥当である．

註 1.7 条件付き確率の表記 $P(A|B)$ において，条件となる事象 B が $B = \{a \leq X < b\}$ のようにある確率変数 X によって記述される場合がある．区間 $[a, b)$ の選び方に応じていくらでも異なった条件事象 B が与えられ，そのつど事象 A の条件 B に関する条件付き確率が考えられる．このような場合，条件付き確率を $P(A|X)$ と一括して表すことがある．前出の練習 1.6 で扱った条件付き確率 $P(A|X \leq 3)$ などはこの例であり，$P(A|X \in J)$ ($J \in \{1, 2, \cdots, 6\}$ の任意の部分集合) などを一括して表す記号が $P(A|X)$ である．測度論的に書くならば，$P(A|X) = P(A|\sigma(X))$ である（次節参照）．ただし，$\sigma(X)$ は X を可測にする最小の σ-加法族を表す．

1.6 条件付き期待値

条件付き確率, 条件付き期待値について測度論の観点から今少し説明を続ける．

確率変数 X と事象 $A \in \mathcal{F}$ に対して，$E[X\mathbf{1}_A]$ のことを $E[X; A]$ とも記す．すなわち，

$$E[X; A] = \int_A X(\omega) dP$$

である．

次のことがらは基本的である；

$\mathcal{G}$ を $\mathcal{F}$ に含まれる 部分 σ-集合体とする．$\mathcal{F}$- 可測で期待値のある確率変数 X が与えられたとき，任意の $\mathcal{G}$-可測な事象 A に対して，$E\{X; A\} = E\{Y; A\}$ が成立するような $\mathcal{G}$-可測な確率変数 Y が一意的に存在することが知られている（後出，**ラドン–ニコディム**（Radon-Nikodým）**の定理**)．

定義 1.7 この Y を $Y = E\{X|\mathcal{G}\}$ と記し X の 加法族 $\mathcal{G}$ に関する条件付き期待値とよぶ．すなわち，任意の事象 $A \in \mathcal{G}$ に対して，

$$\int_A X dP = \int_A E[X|\mathcal{G}] dP$$

条件付き期待値について基本的な性質を挙げていく．

命題 1.3（tower property） $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ を $\mathcal{F}$ の部分加法族で $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ とする．このとき，$E\{|X|\} < \infty$ である確率変数 X について次式が成り立つ，

$$E[E[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = E[X|\mathcal{H}] \tag{1.8}$$

特に，

$$E[E[X|\mathcal{G}]] = E[E[X|\mathcal{G}]|\{\emptyset, \Omega\}] = E[X|\{\emptyset, \Omega\}] = E[X]$$

である．$\{\emptyset, \Omega\}$ は自明な加法族である．

証明 X を任意の確率変数とし，事象 A を $A \in \mathcal{H}$ とする．$A \in \mathcal{G}$ でもあるから，条件付き期待値の定義より，

$$E[X; A] = \int_A E[X|\mathcal{H}] dP = \int_A E[X|\mathcal{G}] dP.$$

したがって条件付き期待値の一意性より関係式 (1.8) を得る． □

命題 1.4 二次の期待値を持つ確率変数 X, Y について，特に Y が部分加法族 $\mathcal{G}$ $(\subset \mathcal{F})$ について可測であれば次式が成り立つ，

$$E[XY] = E[YE[X|\mathcal{G}]]$$

証明 Y が次のような $\mathcal{G}$-可測な階段関数である場合を考えてみる，

$$Y(\omega) = \sum_{k=1}^{n} y_k \mathbf{1}_{Ak}(\omega)$$

ただし $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathcal{G}$，$y_1, y_2, \cdots, y_n \in \mathbf{R}$ である．期待値演算の線形性と条件付き期待値の定義より，

$$
\begin{aligned}
E\{XY\} &= \sum_{k=1}^{n} y_k E[X\mathbf{1}_{A_k}] = \sum_{k=1}^{n} y_k E[\mathbf{1}_{A_k} E[X|\mathcal{G}]] \\
&= E\left[\left(\sum_{K=1}^{n} y_k \mathbf{1}_{A_k}\right) E[X|\mathcal{G}]\right] = E[YE[X|\mathcal{G}]]
\end{aligned}
$$

Y が一般の確率変数である場合でも，上のような階段関数でいくらでも近似できるから，このことより求める関係式が得られる． □

X を 2 乗可積分な確率変数とすればこの結果より直ちに，

$$
E[E[X|\mathcal{G}](X - E[X|\mathcal{G}])] = E[(E[X|\mathcal{G}])^2 - (E[X|\mathcal{G}])^2] = 0
$$

であること，すなわち $E\{X|\mathcal{G}\}$ と $X - E[X|\mathcal{G}]$ とは $L^2(\Omega)$ の元として直交していることがわかる．

註 1.8 言いかえれば，$\mathcal{G}$-可測な 2 乗可積分確率変数の全体を $m(\mathcal{G})$ とでも表せば，$E[X|\mathcal{G}]$ は X のこの部分空間 $m(\mathcal{G})$ への正射影であり，したがってさらに言いかえれば，それは $m(\mathcal{G})$ の中で X に最も近い元になっている．

1.6.1 補足——ラドン–ニコディムの定理*2

μ, ν を可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の測度とする．$\mu(A) = 0$ であるような任意の $A \in \mathcal{F}$ について $\nu(A) = 0$ であるとき，ν は μ に関して絶対連続であるという．次の定理が出発点となる．

定理 1.8 ν が μ に関して絶対連続であれば，任意の可測集合 $A \in \mathcal{F}$ に対して次のような関係式を満たす可積分関数 $d\nu/d\mu(x)$ が（μ に関して）一意的に存在する．

$$
\nu(A) = \int_A \frac{d\nu}{d\mu}(x) d\mu(x)
$$

$d\nu/d\mu(\omega)$ を ν の μ に関するラドン–ニコディム微分という．

*2 先を急ぐ読者は読み跳ばされたい．

条件付き期待値 $E^\mu[X|\mathcal{G}]$ の存在と一意性は，この定理に基づき次のようにして保証される．

μ を確率 P とし，X を非負の確率変数 X とする．$\mathcal{F}$ の部分加法族 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ として，$(\Omega, \mathcal{G})$ 上の測度 ν を次で定義する．

$$\nu(A) = E^\mu[\mathbf{1}_A X] = \int_A X d\mu \quad (A \in \mathcal{G}) \tag{1.9}$$

このときこれら μ, ν は可測空間 $(\Omega, \mathcal{G})$ 上の測度として定理 1.8 の条件を満たしているから，微分 $Y(\omega) = d\nu/d\mu(\omega)$ が $\mathcal{G}$-可測関数として一意的に定まり，任意の $A \in \mathcal{G}$ に対して

$$E^\mu[X; A] = E^\mu[Y; A]$$

が成立する．よって確率変数 X の $\mathcal{G}(\subset \mathcal{F})$ に関する条件付き期待値 $E^\mu[X|\mathcal{G}](\omega) = Y(\omega)$ の存在と一意性が示された．

2

統計的独立性

無作為な試行やランダムな実験といった現象の記述に必要となるのが確率変数や事象の独立性という概念であり，確率論の展開やその応用において極めて重要な役割を果たす．本シリーズの主題であるファイナンス理論も例外ではない．また本書でも後の章で取り上げる確率的数値解析理論の基礎的理解のために不可欠のものとなる．それゆえここで 1 章を設けて簡単なまとめを与えておくことにする．

2.1 独立な事象

$P(A|B) \neq P(A)$ であれば事象 B の実現が他の事象 A の実現確率に影響を与えること，言いかえれば二つの事象 A, B の間には何らかの依存関係があることを示している．これに対して，$P(A|B) = P(A)$ であるとき二つの事象 A, B は**統計的に独立**である（あるいは単に，独立である）という．条件付き確率の定義より，このことは

$$P(AB) = P(A|B)P(B) = P(A)P(B)$$

であることを意味しており，したがってまた，

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B)$$

でもある．

例 2.1 52 枚のトランプカードから無作為に 1 枚を抜き出す．そのカードが「2 である」事象を A，「ハートである」事象を B とする．$P(A) = 1/13$，$P(B) =$

$1/4,\ P(AB) = 1/52$ である．このとき $P(A|B) = P(AB)/P(B) = 4/52 = 1/13 = P(A)$ であるから，事象 A, B は独立である．

独立性の概念は事象列 $\{A_k\}$ にも拡張される．

定義 2.1 (1) 事象系 $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ は任意個数 $k \le n$ の部分系 $\{A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_k}\} \subset \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ について次の関係式が成り立つとき，統計的に独立であるという．

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_j})$$
$$(1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n) \tag{2.1}$$

(2) 可算無限個の事象列 $\{A_n\}$ は任意の部分系が（1）の意味で独立であるとき，統計的に独立であるという．

n 個の事象系 $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ の独立性を規定する関係式 (2.1) の総個数は $2^n - n - 1$ である．実際，個数 $2 \le k \le n$ を固定するごとに，部分系のラベル $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$ を選ぶ方法は $\binom{n}{k}$ 個ある．したがって，

$$\text{総個数} = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n - n - 1 = 2^n - n - 1$$

となる．例えば，$n = 2$ の場合は 1 個であり，$n = 3$ ならば 4 個である．

無作為な実験を行うことを確率論では試行という．独立な事象系の概念は複数回のこうした試行結果についての数学的モデルとなる．

例 2.2 銅貨を n 回無作為に投げる実験を考える．表の出た回数が k 回となる確率 p_k を求めてみよう．ただし，1 回ごとに表の出る確率は p $(0 \le p \le 1)$ としておく．

解 i 回目の結果が表であるという事象を A_i，n 回の中で表の出た回数が k という事象を A で表す．$\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$ を $\{1, 2, \cdots, n\}$ の部分系とし，これに

対応して

$$B_{i_1,i_2,\cdots,i_k} = A_1^c \cap A_2^c \cap A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k} \cap \cdots \cap A_n^c$$

とおけば，これは「$\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$ で指定された回だけ表が出る」という事象を表す．$P(B_{i_1,i_2,\cdots,i_k}) = p^k(1-p)^{n-k}$ であるから（以下の註 2.1 を参照），以上より，

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} P(B_{i_1,i_2,\cdots,i_k}) \\ &= \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} p^k(1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

すなわち，表の出た回数は二項分布 $B(n,p)$ に従う確率変数であることがわかる．

註 2.1 $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ が独立な事象系であれば $\{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$，ただし $B_k = A_k$ あるいは $= A_k^c$，も同様である．

2.2 独立な確率変数

同一の確率空間で定義された確率変数の集まり $\{X_n\}$ についても統計的独立性（以後簡単に独立性という）の概念が適用される．

定義 2.2

(1)（個数が有限個の場合）$\{X_k, 1 \le k \le n\}$ は次の条件を満たすとき独立であるという，すなわち；$^\forall(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ について等式，

$$P(X_i \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k \le x_k) \qquad (2.2)$$

が成り立つことである．

(2)（無限列の場合）$\{X_n, n \in \mathbf{N}\}$ が独立であるとは，任意の有限部分系 $\{X_{i_1}, X_{i_2}, \cdots, X_{i_n}\}$ $(^\forall n, ^\forall i_1 <^\forall i_2 < \cdots <^\forall i_n)$ が (1) の意味で独立であることとする．

$(X_1, X_2. \cdots, X_n)$ の同時分布関数を $F_{X_1,X_2,\cdots,X_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ とすれば，独立性の条件式 (2.2) は次のように表されることを注意しておこう；

$$F_{X_1,X_2,\cdots,X_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} F_{X_k}(x_k)$$

ここに F_{X_k} は n 次元同時分布関数 $F_{X_1,X_2,\cdots,X_n}$ の周辺分布関数，すなわち数確率変数 X_k の分布関数である．したがって特に各確率変数 X_k が 確率分布密度関数（以後略して *pdf* と記す） f_k を持つ場合は $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ も *pdf* $f_{1,2,\cdots,n}$ を持ち，関係式

$$f_{1,2,\cdots,n}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} f_k(x_k)$$

が成り立つ．

独立性は無相関性よりはるかに強い条件である．X, Y が独立ならば無相関，$\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ であるが逆は正しくない． しかし，次のような場合もある．

例 2.3 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ を n 次元正規確率変数とする．すなわち，$\mathbf{X}$ は例 (1.11) で示した $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ を分布密度関数とするものとする．このとき簡単な計算でわかるように，$\mathrm{Cov}(X_i, X_{j.}) = \gamma_{i,j}$ $(1 \le i, j \le n)$ となっている．したがって，$\{X_k, 1 \le k \le n\}$ が互いに無相関（$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0$, $(i \ne j)$）であれば，分布の共分散行列 $G = \{\gamma_{i,j}\}$ は対角行列 $G = \{\gamma_{i,i}\delta_{i,j}\}$ となり，分布密度関数 $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ は次のように 1 次元周辺分布密度の直積となる，

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \prod_{k=1}^{n} f_{X_k}(x_k), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

すなわち，正規確率変数系 $\{X_k, 1 \le k \le n\}$ においては各成分が無相関であれば確率変数系は独立になっている．

定義 2.2 とそれに続く説明より比較的容易に次の結果が導かれる．

定理 2.1　(1) $X_1, X_2, \cdots, X_n$ が独立であるための必要十分条件は，任意の有界連続関数 $\{\varphi_k(x_k), 1 \le k \le n\}$ について，次の等式が成り立つことである．

$$E\prod_{k=1}^{n}\varphi_k(X_k) = \prod_{k=1}^{n}E[\varphi_k(X_k)]$$

(2) あるいは次のようにも言える；任意の実数の組 $(\theta_i, \theta_2, \cdots, \theta_n)$ について次の等式が成り立つことである．

$$E\left[\exp\left\{\sqrt{-1}\sum_{k=1}^{n}\theta_k X_k\right\}\right] = \prod_{k=1}^{n}E[\exp\{\sqrt{-1}\theta_k X_k\}]$$

すなわち，確率ベクトル $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ の特性関数（上式左辺）が各 X_k の特性関数 $E[\exp\{\sqrt{-1}\quad\theta_k X_k\}]$ の積（右辺）で書けること．

例 2.4　銅貨を投げる実験で k 回目の結果が表であれば 1，裏であれば 0 の値をとる確率変数を X_k とすれば，$\{X_k,\ 1 \le k \le n\}$ は独立で同一分布，

$$P(X=1) = p,\quad P(X=0) = 1-p \quad (0 < p < 1)$$

に従う確率変数列となる．$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ とおけば n 回の試行で表の出た回数を表す．S_n の特性関数 $\varphi_n(\theta) = E[\exp[\sqrt{-1}\theta S_n]]$ を求めてみる．

$$\begin{aligned}\varphi_n(\theta) &= E\left[\prod_{k=1}^{n}\exp[\sqrt{-1}\theta X_k]\right] = \prod_{k=1}^{n}\{p\exp[(\sqrt{-1}\theta) + (1-p)]\} \\ &= \{p\exp[\sqrt{-1}\theta] + (1-p)\}^n\end{aligned}$$

二項定理より，

$$\begin{aligned}\{p\exp(\sqrt{-1}\theta) + (1-p)\}^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\{p\exp(\sqrt{-1}\theta\}^k(1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\exp(k\sqrt{-1}\theta)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\exp(k\sqrt{-1}\theta)P(S_n = k).\end{aligned}$$

よって，$P(S_n = k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ すなわち $S_n \sim B(n,p)$ であり，これは既に得ていた結果（例 2.2 ）である．

独立な確率変数列の和にかかわる計算について，次の結果はよく使われる．

命題 2.1 X, Y を独立な確率変数でそれぞれ *pdf* f_X，f_Y を持つとすれば，和 $Z = X + Y$ も *pdf* f_Z を持ち，次で与えられる．

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx = (f_X * f_Y)(z)$$

また X, Y が整数値をとる確率変数で独立であるとすれば，和 $Z = X + Y$ の分布は次で定められる．

$$P(Z = n) = \sum_{k+l=n} P(X = k) P(Y = l) \quad (^\forall n \in \mathbf{Z})$$

例 2.5 X, Y を独立でそれぞれ平均 $\lambda_1, \lambda_2 (> 0)$ のポアソン確率変数とする．このとき，$Z = X + Y$ は平均 $\lambda_1 + \lambda_2$ のポアソン確率変数となる．

実際 Z の値域は 0 以上の整数であり，$0 \leq k$ について，

$$\begin{aligned} P(Z = k) = P(X + Y = k) &= \sum_{i=0}^{k} P(X + Y = k, X = i) \\ &= \sum_{i=0}^{k} P(X + Y = k | X = i) P(X = i) \end{aligned}$$

であるが，$P(X = i) = e^{-\lambda_1}(\lambda_1^i / i!)$ および

$$P(X + Y | X = i) = P(Y = k - i | X = i) = P(Y = k - i) = e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!}$$

であったから，

$$P(Z = k) = \sum_{i=0}^{k} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!} \frac{\lambda_1^i}{i!} = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^k}{k!}$$

となり結論を得る．

例 2.6 X, Y は独立で $X \sim N(m_x, \sigma_x^2)$，$Y \sim N(m_y, \sigma_y^2)$ とすれば，和 $Z = X + Y$ も正規確率変数で，$Z \sim N(m_x + m_y, \sigma_x^2 + \sigma_y^2)$ となる．

実際，X, Y の独立性より，Z の特性関数 $\varphi_Z(\theta) = E[\exp(\sqrt{-1}\theta Z)]$ は X, Y の特性関数 $\phi_X(\theta)$, $\varphi_Y(\theta)$ の積として表される（定理 2.1 の (2)）．簡単な計算により，

$$\varphi_X(\theta) = \exp\left\{\sqrt{-1}\theta m_x - \frac{\theta^2}{2}\sigma_x^2\right\},\quad \varphi_Y(\theta) = \exp\left\{\sqrt{-1}\theta m_y - \frac{\theta^2}{2}\sigma_y^2\right\}$$

であることがわかるから，

$$\varphi_Z(\theta) = \varphi_X(\theta)\varphi_Y(\theta) = \exp\left\{\sqrt{-1}\theta(m_x + m_y) - \frac{\theta^2}{2}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)\right\}$$

これより結論を得る．

2.3　独立確率変数列の和

$\{X_n\}$ を独立で同一分布に従う確率変数列とする（このような列を**ベルヌイ列**，あるいは *i.i.d.* 列という）．このような列の和として構成される

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k,\quad S_0 = 0$$

列 $\{S_n\}$ の挙動に，特に算術平均列 $(1/n)S_n$ の $n \to \infty$ における挙動に関心があり，本節の目的は関連する重要な二つの極限定理を紹介しておくことである．本論に入る前に，上のような算術平均列に限らず，$\{X_n\}$ が一般の独立確率変数列である場合の級数 $S = \sum_{n=1}^{\infty} X_n$ の収束性に関するごく一般的な注意を与えておく．

級数 S あるいはベルヌイ（Bernoulli）列から作る算術平均列 $\{S_n/n\}$ にしろ，その収束性は $\{X_n\}$ の最初の有限個の要素 $\{X_k, k \leq n < \infty\}$ には何の影響も受けないことに注意する．X_n が生成する（すなわち X_n を可測にする最小の）σ-集合体を $\mathcal{B}_n$ と書くことにすると，異なる $\mathcal{B}_n$ に属する事象は互いに独立である．$\mathcal{C}_n = \bigcap_{k \geq n} \mathcal{B}_k$ とおけば，事象 $A =$「上の級数が収束する」は任意の n について $\mathcal{C}_n$-可測である．このような事象を尾部事象（tail event）という．独立な σ-加法族 $\mathcal{B}_n$ の尾部事象について次の結果が知られている．

定理 2.2（コルモゴロフの 0-1 法則） 尾部事象の確率は 0 か 1 に限る．言いかえれば，$\bigcap_{n\geq 1}\mathcal{B}_n = \{\Omega, \emptyset\}$.

註 2.2 したがって独立確率変数列が作る級数 S や，ベルヌイ列の算術平均列 $\{S_n/n\}_n$ が $n\to\infty$ において収束する確率は 0 か 1 である．

命題 2.2（ボレル–カンテリの第 2 補題） 独立な事象列 $\{A_n\}$ が条件，$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ を満たすならば，$P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$ が成り立つ．

証明 $C_n = \bigcap_{k\geq n} A_k^c$ とおけば，$\liminf_{n\to\infty} A_n^c = \lim_{n\to\infty} C_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ である．また，不等式 $1-x\leq e^{-x}$ $(x\geq 0)$ より，

$$
\begin{aligned}
P(C_n) &= \lim_{m\to\infty} P\left(\bigcap_{k=n}^{m} A_k\right) = \lim_{m\to\infty}\prod_{k=n}^{m}(1-P(A_k)) \\
&\leq \lim_{m\to\infty}\prod_{k=n}^{m} e^{-P(A_k)} = \lim_{m\to\infty} e^{-\sum_{k=n}^{m} P(A_k)} = 0
\end{aligned}
$$

よって，

$$
P\left(\liminf_{n\to\infty} A_n^c\right) = \lim_{n\to\infty} P(C_n) = 0
$$

となり結論を得る． □

算術平均列の収束性の話に戻る．以下の議論では簡単のために X_n は条件 $E[|X_n|^2] < \infty$ を満たすものとし，$E[X]=\mu$, $\mathrm{Var}(X)=\sigma^2$ とおいておく．

$\{S_n/n\}$ が平均値 $\mu = E[X]$ に確率収束すること，すなわち；
任意の正数 ϵ に対して，

$$
\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n}-\mu\right| > \epsilon\right) = 0
$$

が成り立つことは容易にわかる．実際，

$$
\frac{S_n}{n}-\mu = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mu)
$$

であることと，分散に関する等式（命題 1.3）より，

$$E\left[\left|\frac{S_n}{n}-\mu\right|^2\right]=\frac{1}{n^2}\mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Var}(X_k)$$

が成り立つ．これとチェビシェフの不等式（補題 1.2）より，

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}-\mu\right|>\epsilon\right)\le\frac{E[|S_n/n-\mu|^2]}{\epsilon^2}=\frac{1}{n^2\epsilon^2}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Var}(X_k)=\frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}$$

を得てこれより，$\lim_{n\to\infty}S_n/n=\mu$ (in P) を知る．これを **大数の弱法則** という．次に見るように，今の場合はこれよりもっと強い結果が成り立つ．

定理 2.3（大数の強法則） 列 $\{S_n/n\}$ は μ に概収束する，すなわち

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\mu\right)=1$$

ちょっと視点を変えて，列 $Y_n=S_n-n\cdot\mu=\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mu)$ について考えてみる．$E[Y_n]=0$ であり，$n>m$ の場合，$Y_n-Y_m=X_{m+1}+\cdots+X_n+(n-m)\mu$ であるから $\{X_n\}$ の独立性より，Y_n-Y_m と $Y_k(k\le m)$ とは独立であり $E[Y_n-Y_m|Y_m]=E[Y_n-Y_m]=0$ $(P-a.s.)$ となっている．よって，列 $\{Y_n\}$ は次の性質を持つことがわかる．

$$E[Y_n|Y_1,Y_2,\cdots,Y_m]=E[(Y_n-Y_m)+Y_m|Y_1,Y_2,\cdots,Y_m]=Y_m,\quad(P-a.s.)$$

このような確率系列 $\{Y_n\}$ をマルチンゲールという．上の大数の強法則の証明には次の補題を必要とする．

補題 2.1（コルモゴロフの不等式） 列 $\{Y_n\}$ について次の不等式が成り立つ；

$$P\left(\max_{1\le k\le n}|Y_k|\le\epsilon\right)\le\frac{E[|Y_n|^2]}{\epsilon^2}\qquad(\epsilon>0).$$

証明 $A=\{\omega;\max_{1\le k\le n}|Y_k|\ge\epsilon\}$ とし，$\tau(\omega)=\min\{k\le n;|Y_k|\ge\epsilon\}$ とおく．$\tau(\omega)$ は系列 $\{|Y_k|\}$ が最初に値 ϵ を超えるランダムな時刻 k を表す．

$A_k = \{\tau = k\}$ $(1 \leq k \leq n)$ とおけば，$\{A_k, 1 \leq k \leq n\}$ は排反事象列であり，$\bigcup_{k=1}^n A_k = A$ となっている．したがって，

$$E[|Y_n|^2] \geq E[|Y_n|^2; A] = \sum_{k=1}^n E[|Y_n|^2; A_k]$$

ここで，

$$\begin{aligned} E[|Y_n|^2; A_k] =& E[|Y_k + (X_{k+1} - \mu) + \cdots + (X_n - \mu)|^2; A_k] \\ =& E[|Y_k|^2; A_k] + 2E[Y_k\{(X_{k+1} - \mu) + \cdots + (X_n - \mu)\}; A_k] \\ &+ E[\{(X_{k+1} - \mu) + \cdots + (X_n - \mu)\}^2; A_k] \\ \geq& E[|Y_k|^2; A_k] + 2E[Y_k\{(X_{k+1} - \mu) + \cdots + (X_n - \mu)\}; A_k] \end{aligned}$$

であるが，$\{X_n - \mu\}$ の独立性と $E[X_k - \mu] = 0$ より，

$$\begin{aligned} & E[Y_k\{(X_{k+1} - \mu) + \cdots + (X_n - \mu)\}; A_k] \\ &\quad = Y_k E[(X_{k+1} - \mu) + \cdots + (X_n - \mu)\}; A_k] \\ &\quad = Y_k E[(X_{k+1} - \mu) + \cdots + (X_n - \mu)] = 0 \end{aligned}$$

よって，$E[|Y_n|^2; A_k] \geq E[|Y_k|^2; A_k] \geq \epsilon^2 P(A_k)$ であるから，

$$E[|Y_n|^2] \geq \sum_{k=1}^n E[|Y_k|^2; A_k] \geq \epsilon^2 \sum_{k=1}^n P(A_k) = \epsilon^2 P(A)$$

となり，これより結論を得る． □

補題 2.2 $Z_n = \sum_{k=1}^n (X_k - \mu)/k$ とおけば，Z_n は概収束する．

証明 まず $E[Z_n] = 0$，および，

$$\mathrm{Var}(Z_n) = \sum_{k=1}^n \frac{\sigma^2}{k^2} < \sigma^2 \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} < \infty$$

に注意する．各 n ごとに自然数 $l(n)$ を $\sum_{k \geq l(n)} \sigma^2/k^2 < 1/n^4$ となるように定める．事象 $A_n = \{\sup_{k \geq l(n)} |Z_k - Z_{l(n)}| > 1/n\}$ について，コルモゴロフの不等式より次の評価が得られる；

$$
\begin{aligned}
P(A_n) &= \lim_{N\to\infty} P\left(\max_{l(n)\le k\le N} |Z_k - Z_{l(n)}| > \frac{1}{n}\right) \\
&\le \lim_{N\to\infty} n^2 E[|Z_N - Z_{l(n)}|^2] \\
&\le n^2 \sum_{k\ge l(n)} \frac{\sigma^2}{k^2} \le \frac{1}{n^2}
\end{aligned}
$$

級数 $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ $(< \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 < \infty)$ は収束級数であるから，ボレル–カンテリの第 1 補題 (1.2) より，ω ごとに十分大きな自然数 $N(\omega)$ をとれば，$P(A_n^c,\ ^\forall n \ge N(\omega)) = 1$ が成り立ち，したがって，十分大きな $l(n)$ について，

$$
|Z_k - Z_j| \le \frac{2}{n}, \quad ^\forall j, k \ge l(n)
$$

となり，列 $\{Z_n\}$ が確率 1 でコーシー列であることがわかる． □

証明 [定理 (2.3)] $(X_n - \mu) = n(Z_n - Z_{n-1})$ であるから，

$$
\begin{aligned}
\frac{Y_n}{n} &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\{k(Z_k - Z_{k-1})\} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(Z_k - Z_{k-1}) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n}(Z_k - Z_{k-1}) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(Z_n - Z_{j-1}) \\
&= \frac{1}{n}\left\{\sum_{j=1}^{[\sqrt{n}]} + \sum_{j=[\sqrt{n}]}^{n}\right\}(Z_n - Z_{j-1})
\end{aligned}
$$

上の補題より，$\{Z_n\}$ は収束列であったから有界であり，$|Z_k| \le^{\exists} M$, また任意の微少な $\epsilon > 0$ に対して n を十分大きくとっておけば，$^\forall j > [\sqrt{n}] + 1$ について，$|Z_n - Z_{j-1}| < \epsilon$ とできる．よって，

$$
|Y_n/n| \le 2M\frac{1}{\sqrt{n}} + \epsilon,
$$

となり結論に至る． □

2.4 モンテカルロ法

大数の法則は数値計算に利用できる．

例 2.7 定積分 $I=\int_a^b f(x)dx$ を数値的に求めることを考える．$f(x)$ は $[a,b]$ で有界な積分可能関数である．一様分布 $U([a,b])$ に従うベルヌイ列 $\{\Xi_n\}$ と $f(x)$ とを合成してできる変量 $f(\Xi_n)$ の算術平均列

$$Y_n'=\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\Xi_k)$$

を考える．

$$E[f(\Xi)]=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

であるから，大数の法則より系列 Y_n' は確率 1 で $m=(b-a)E[f(\Xi)]=I$ に収束することがわかる．ベルヌイ列 $\{\Xi_n\}$ の実現値 $\{\Xi_n(\omega_0)\}$ と見なすことができるような数列 $\{\xi_n\}$ があれば，

$$y_n'=\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)$$

で構成する数列 $\{y_n'\}$ は十分大きな n に対して，積分値 I の近似値を与えているはずである．

上のような数列 $\{\xi_n\}$ を（数学的概念の定義としては曖昧であるが，ここではざっくりと）**乱数**ということにする．特に今の場合は一様乱数であるという．一様乱数を生成する手順は C や Pascal, Fortran 等々の計算機のプログラム言語には標準的関数として装備されているので，これを使えば積分値を求める確率的実験ができる（文献 1)参照）．このようにして乱数を使って積分値を求める方法を一般に**モンテカルロ法**というが，今のままではまだ数値計算法とするには早計である．そのためには理論的な誤差評価が必要であり，それは次に説明する定理によって与えられる．

定理 2.4（中心極限定理） $\{X_n\}$ を平均 0, 分散 1 のベルヌイ列とする．このとき $Z_n=(1/\sqrt{n})\sum_{k=1}^{n}X_k$ は $n\to\infty$ において標準正規変数 Ξ に法則収束する．すなわち，任意の区間 $[\alpha,\beta]$ について

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n \in [\alpha,\beta]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_\alpha^\beta \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}dx$$

が成り立つ.

証明　分布の収束を言えばよいのであるから，Z_n の特性関数 $\varphi_{Z_n}(t) = E[\exp\{\sqrt{-1}tZ_n\}]$ が $t=0$ の近傍で $\Xi \sim N(0,1)$ の特性関数 $\varphi_\Xi(t) = \exp\{-t^2/2\}$ に収束することを示せばよいが，これは微積分の演習問題である．□

$\{X_n\}$ が平均 m，分散 σ^2 のベルヌイ列である場合は，Z_n として

$$Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{X_k - m}{\sigma}\right)$$

とおけば，これが $N(0,1)$ に法則収束することを注意しておく．

例 2.8（モンテカルロ法の誤差評価）　先の例 2.7 を続ける．$Y'_n = \{(b-a)/n\}\sum_{k=1}^n f(\Xi_k)$ を $I = \int_a^b f(x)dx = (b-a)E[f(\Xi)]$ の近似値としたときの誤差を評価してみる．Y'_n がランダムであるから誤差もランダムである．

$$Y'_n - I = (b-a)\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(f(\Xi_k) - m)$$

であるから，$\sigma^2 = \mathrm{Var}(f(\Xi))$ とおけば，

$$\sqrt{n}\frac{(Y'_n - I)}{(b-a)\sigma} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{(f(\Xi_k) - m)}{\sigma}$$

中心極限定理より，上式左辺の量は $n \to \infty$ において標準正規変数 G に法則収束することがわかっているから，乱暴な書き方を許すとすれば，

$$Y'_n = I + \frac{1}{\sqrt{n}}\sigma(b-a)G + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

言いかえれば，モンテカルロ近似 Y_n' の誤差は上の意味で $1/\sqrt{n}$ のオーダーで減少していく．ここに上の $O(\cdot)$ は同位の無限小を表すランダウ (Landau) の記号である（附録の 9.4 参照）．

モンテカルロ法による数値積分法の大きな特徴は，近似精度が積分の次元（変数の個数）にかかわらず，またどのような被積分関数に対しても（分散 σ^2 などの定数は別にして）一貫して $O(1/\sqrt{n})$, ($n=$ サンプル数) のオーダーであることである．特に次元数に無関係という特徴は重大で，現在のところ大きな次元の重積分計算に関しては唯一の現実的数値計算法であろう．

ところでこの誤差の減少の速さをさらに改良することは可能であるが，それには確率論を離れて擬似乱数の導入，中でもいわゆる**低差異列**（"low discrepancy sequence" の訳）といわれる**準乱数**の導入が必要となる．ちなみにプログラムでもって生成される数列で乱数の代用となりうるものを擬似乱数という．ある種の規則で生成されるものであるから，もちろんランダムではありえないのであるが，モンテカルロ法による数値積分のように限定された目的に使用される分には支障がない．例えば数値積分を例にとれば，$I=\int_a^b f(x)dx$ をモンテカルロ法で求める際に乱数に求められる重要な性質はその一様分布性である．区間 $[0,1]$ 内の数列 $\{x_n\}$ は次の場合，一様分布列であるという；任意の $[\alpha,\beta]\subset[0,1]$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{1}_{[\alpha,\beta]}(x_k)=\beta-\alpha$$

このとき，積分可能な関数 $f(x)$ について

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\{a+x_k(b-a)\}$$

が成り立つ．一般に s 次元区間 $[0,1]^s$ における一様分布列 $\{\mathbf{x_n}\}$ について，

$$\delta_n^*=\frac{1}{n}\sup_{\mathbf{t}\in(0,1)^s}\left|\sum_{k=1}^{n}\mathbf{1}_{[0,t]^s}(\mathbf{x}_k)-|\mathbf{t}|\right|,\quad |\mathbf{t}|=t_1\cdot t_2\cdots t_s\quad \mathbf{t}=(t_1,t_2,\cdots,t_s)$$

とおけば，これは一様分布列 $\{x_n\}$ の**散らばりのよさ**を表す尺度と見なせるが，特に $\delta_n^*\le C(\log n)^s/n$ となるような数列を低差異列 (low discrepancy sequence)

とよぶ．次の結果が知られている（Koksma-Flawka の定理）；

$$\left| I - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\mathbf{x}_k) \right| \le C_1 \delta_n^*$$

ここで C_1 は被積分関数 $f(x)$ に依存する定数である．詳しいことは乱数の解説書を見られたい（例えば，文献 3)）．

3 確率過程，ブラウン運動，マルチンゲール

例えば日々変動する株価の記録とか通信回線に混入する雑音のように，時間的に変動する偶然現象を記述するには，各時刻ごとの観測値として時間の径数 $t \in \mathbf{T}$ で順序づけられた確率変数の列 $\{X_t(\omega), t \in \mathbf{T}\}$ を当てるのが自然であろう．これが**確率過程**の素朴な概念である．慣習として時間の径数 t の動く範囲を表す集合 $\mathbf{T} \subset \mathbf{R}^1$ が $\mathbf{T} = \mathbf{N}$ (自然数の全体) のように離散的である場合は時系列ともいわれる．ここでは確率過程の数学的取り扱いについて説明しておく．

3.1 確 率 過 程

確率変数の族 $\mathbf{X} = \{X_t, t \in \mathbf{T}\}$ を考え，これらは全て同一の確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ で定義されているとする．$t = t_0$ を指定すれば $X_{t_0}(\omega)$ は時刻 t_0 におけるランダムな変動量の状態を表すが，確率径数 $\omega_0 \in \Omega$ を指定すれば $\mathbf{X}(\omega_0)$ は実数の集合 $\{X_t(\omega_0), t \in \mathbf{T}\}$ で，$\mathbf{T} = [a, b] \subset \mathbf{R}^1$ であればそれは区間 $[a, b]$ 上の実数値関数を表し，$\mathbf{T} = \mathbf{N}$（自然数の集合）であれば実数列を表す．これを $\{X_t\}$ の見本過程，見本関数軌道，あるいは標本過程という．言いかえれば全集合 Ω は全ての実数列の集合, $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ で表す，とか区間 $\mathbf{T} = [a, b]$ で定義された全ての実数値関数集合 $\mathbf{R}^{[a,b]}$ と見なすことができる．

3.1.1 両 立 条 件

確率変数を完全に特徴づけるものは分布関数であった．同一の確率空間で定義された確率変数列やさらには確率過程を特徴づけるものは何であろうか？これを見るために次のように考えてみる；今，無限個の時点 $n \in \mathbf{N}$ の中で

M 個の観測時点を $\{t_1 < t_2 < \cdots < t_M\}$ を指定し，M 次元の確率ベクトル $X^M = (X_{t_1}, X_{t_2}, \cdots, X_{t_M})$ を抜き出せば，この量は M 次元同時分布関数,

$$F_{t_1,t_2,\cdots,t_M}(x_1, x_2, \cdots, x_M) = P\{X_{t_i} \leq x_i,\ 1 \leq i \leq M\} \qquad (3.1)$$

によって特徴づけられる．観測時点の個数 M も観測時点 $\{t_1, t_2, \cdots, t_M\}$ の選び方も任意であり，これらの無数の組み合わせごとに有限次元の同時分布関数 $F_{t_1,t_2,\cdots,t_M}(x_1, x_2, \cdots, x_M)$ が定まり，時系列 $\{X_n\}$ を与えればこれらの有限次元分布関数の族

$$\{\{F_{t_1,t_2,\cdots,t_M}(x_1, x_2, \cdots, x_M);\ (t_1, t_2, \cdots, t_M) \in \mathbf{N}^M\}, M \in \mathbf{N}\}$$

が最初に設定された確率 $P(\cdot)$ によって確定されることになる．

$$\begin{aligned}&P(X_{t_1} \leq x_1, X_{t_2} \leq x_2, \cdots, X_{t_{M_0}} \leq x_{M_0})\\&= P(X_{t_1} \leq x_1, \cdots, X_{t_{M_0}} \leq x_{M_0}, X_{t_{M_0}+1} < \infty, \cdots, X_{t_M} \leq \infty)\end{aligned}$$

であるから，時系列 $\mathbf{X}$ から導出されるこれら分布関数の族は互いに次の条件を満たしている；

$$F_{t_1,t_2,\cdots,t_{M_0}}(x_1, x_2, \cdots, x_{M_0}) = F_{t_1,t_2,\cdots,t_{M_0},\cdots,t_M}(x_1, x_2, \cdots, x_{M_0}, \infty, \cdots, \infty) \qquad (3.2)$$

既に離散的確率空間の例（第 1 章）で述べたように，これを**両立条件**という．

重要なのはこの逆が成立するかということである．すなわち，上の両立条件を満たすような有限次元分布関数の族

$$\{\{F_{t_1,t_2,\cdots,t_M}(x_1, x_2, \cdots, x_M);\ (t_1, t_2, \cdots, t_M) \in \mathbf{N}^M\}, M \in \mathbf{N}\}$$

が与えられたとき，これらのそれぞれを指定された次元と観測時点における有限次元同時分布とするような時系列（確率変数列）$\{X_n\}$ が存在するであろうか？　言いかえれば，先の関係式 (3.1) を満たすような確率 P が適当な σ-加法族 $\mathcal{F}$ を伴った可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ の上に存在するのであろうか，という問題である．コルモゴロフによる次の定理はそうした確率 P を構成できることを主張している．

定理 3.1（コルモゴロフの拡張定理） 有限次元分布関数の族

$$\{\{F_{t_1,t_2,\cdots,t_M}(x_1,x_2,\cdots,x_M);\ (t_1,t_2,\cdots,t_M)\in\mathbf{N}^M\}, M\in\mathbf{N}\}$$

が両立条件 (3.2) を満たすとき，可測空間 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上に次の関係を満たす確率 $P(\cdot)$ が一意的に存在する．

$$P\{\omega; X_{t_i}(\omega)\le x_i,\ 1\le i\le M\}=F_{t_1,t_2,\cdots,t_M}(x_1,x_2,\cdots,x_M)$$

3.1.2 可　分　性

確率過程の性質については，その定義よりわかるように高々可算個の点 $\{t_1,t_2,\cdots,t_n,\cdots\}$ における条件で記述されるものだけが議論の対象となりうるのであるが，実際の応用的議論においては，例えば $\sup_{t\in[0,1]} X_t$ のようにそうした枠組みにはまらない（このままでは可測性が不明な）量や事象を扱わねばならないことが頻繁に起こる．この懸念は幸いにしてドゥーブ (J.L.Doob) が導入した**可分性**という概念により救われる．

定義 3.1 可測集合 $A\in\mathcal{F}$ は確率が 0，$P(A)=0$ であるとき零（ゼロ）事象であるという．連続径数 $t\in\mathbf{T}$ を持つ確率過程 $\{X_t,t\in\mathbf{T}\}$ は，

$$^\forall x\in\mathbf{R}\ \text{に対して}\quad \left\{\sup_{t\in\mathbf{T}} X_t\le x\right\}\cap\left\{\sup_{t\in\mathbf{T}_c} X_t\le x\right\}^c\subset A$$

となるような可算部分集合 $\mathbf{T}_c=\{t_i.i\in N\}\subset\mathbf{T}$ と零事象 $A\in\mathcal{F}$ がとれるとき可分 (separable) であるという．

確率過程 $\{X_t\}$ は任意の正数 ϵ と $t\in\mathbf{T}$ において次の条件，

$$\lim_{h\to 0} P(|X_{t+h}-X_t|>\epsilon)=0$$

を満たすとき**確率連続**であるという．確率過程の可分性について次の結果は重要な役割を果たす．

定理 3.2 確率連続な確率過程 $\{X_t\}$ は可分である．より丁寧に言うと，可分であるような同値変形 $\{\tilde{X}_t\}$ を作ることができる．すなわち，それ自身は可分

で $\{X_t\}$ と同じ有限次元分布を持つような変形 $\{\tilde{X}_t\}$ を作ることができる.

$\{\tilde{X}_t\}$ を元の確率過程の可分変形 (separable version) という. 本書でこれからの議論に登場する確率過程もそうであるが, 応用分野で現れるものはほぼ例外なく確率連続であると思ってよいので, 以下において全ての確率過程は可分であると最初から仮定して差し支えないことを注意しておこう.

3.2 確率過程の例

数理ファイナンスはもとより, 数理科学の多くの分野における確率・統計理論の主役は確率過程である. ここでは用語の説明も兼ねて典型的な確率過程の例と関連する重要な定理を紹介しておく.

3.2.1 ベルヌイ列

確率変数の章で独立で同一分布に従う確率変数列 $\{X_n\}$ をベルヌイ列 (あるいは *i.i.d.* 列) とよぶことにした. このような列が存在することを確かめておく.

実数列全体の集合 $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ を Ω にとる. $\Omega \ni \omega$ は一つの実数列 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n, \cdots)$ を表す. Ω の部分集合で次の形のものを筒集合という;

$$A = \{\omega \in \Omega;\ \omega_{i_1} \in B_1, \omega_{i_2} \in B_2, \cdots, \omega_{i_n} \in B_n\}$$

ここに B_k は任意のボレル集合, $i_1 < i_2 < \cdots < i_n$ は任意の自然数の組である. 容易にわかるように筒集合の全体 $\mathcal{C}$ は加法族になっている. $(\mathbf{R}, \mathcal{B}_{\mathbf{R}})$ の上の確率測度 μ を任意に固定し, 筒集合 A で $B_k = (-\infty, x_k]$ ($\{x_1, \cdots, x_n\}$ は任意の実数の組) としたものに次の式で確率 $P(\cdot)$ を与える.

$$P(A) = F_{i_1, i_2, \cdots, i_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} \mu((-\infty, x_k])$$

このようにして定まる有限次元分布の組 $\{F_{i_1, i_2, \cdots, i_n}(x_1, x_2, \cdots, x_n),\ n \in \mathbf{N}, (i_1, i_2, \cdots, i_n) \in \mathbf{N}^n\}$ が両立条件を満たすことは容易にわかる. 証明は省くが, 実はこのようにして加法族 $\mathcal{C}$ に導入した確率 P がその上で σ-加法的であること

も示される．したがって，コルモゴロフの拡張定理より，P は可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ の上の確率測度として一意的拡張されることがわかる．ただし，$\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{C})$ は $\mathcal{C}$ を含む最小の σ-加法族である．かくして得られた確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ はベルヌイ列のモデルとなっている．すなわち，$\omega \in \Omega$ は無限数列 $\omega = \{\omega_n\}$ を表しており，$X_n(\omega) = \omega_n$ とおけば，$\{X_n\}$ が μ を共通の分布とするベルヌイ列になっている．

3.2.2 ガウス過程

復習から始める；実数値確率変数 X は次のような *pdf*（確率分布密度関数）$f(x)$ を持つとき平均 m，分散 σ^2 の**正規確率変数**（あるいは，**ガウス確率変数**）であるといい，このことを以下 $X \sim \mathbf{N}(m, \sigma^2)$ と記すことにする．

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (-\infty < x < \infty).$$

ただし，m，$\sigma(\geq 0)$ は実数であり，特に $\sigma = 0$ の場合は $f(x) = \delta_m(x)$ と理解することにする．

同じ確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ で定義された確率変数の組 $\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ は次の条件 (G_n) を満たすとき「結合的に正規である」，あるいは「$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ は $\boldsymbol{n}$ **次元正規確率変数である**」

という；

(G_n) 任意の実係数 $\{\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n\}$ に対して，一時結合 $Y = \sum_{k=1}^n \theta_k X_k$ が正規分布に従う．

この場合，$EX_k = m_k$，$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \gamma_{i,j}$ とすれば，

$$EY = \sum_{k=1}^n \theta_k m_k, \quad \mathrm{Var}(Y) = E[(Y - EY)^2] = \sum_{i,j} \gamma_{i,j}\theta_i\theta_j$$

であるから，$Y \sim \mathbf{N}(\sum_{k=1}^n \theta_k m_k, \sum_{i,j} \gamma_{i,j}\theta_i\theta_j)$ と表してもよい．$n \times n$ 行列 $G = \{\gamma_{i,j}\}$ を $\mathbf{R}^n$ 値確率変数 $\mathbf{X}$ の共分散行列という．n 次元正規確率変数は平均値ベクトル $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \cdots, m_n)$ と共分散行列を与えれば一意的に定まる．

定義 3.2

(1) 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ で定義された確率変数列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ が**ガウス系列**であるとは，任意の個数 n および任意の引数の組 $\{i_1 < i_2 < \cdots < i_n\}$ について，$\{X_{i_1}, X_{i_2}, \cdots, X_{i_n}\}$ が結合的に正規である場合をいう．

(2) 連続変数 $t \in [0, T]$ でパラメータ付けされた確率過程 $\{X_t,\ t \in [0, T]\}$ が**ガウス過程**であるとは，任意の個数 n および任意に指定した n 個の観測点 $\{x_1 < x_2 < \cdots < x_n\}$ における値の組，$\{X_{x_1}, X_{x_2}, \cdots, X_{x_n}\}$ が結合的に正規であることをいう．

n 次元ガウス確率変数 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ の分布は平均値ベクトルと共分散行列 $G = \{\mathrm{Cov}(X_i, X_j)\}$ を与えれば一意的に決定された．同様に，ガウス系列（あるいはガウス過程）の分布も平均値ベクトル $\mathbf{m} = \{EX_n\}_{n=1}^{\infty}$（あるいは平均値関数 $m(t) = EX(t)$）と共分散行列あるいは自己相関関数 $R(x, y) = \mathrm{Cov}(X(s), X(t))$，$(s, t) \in [0, T]^2$ により一意的に決定される．

ガウス過程の典型的な例はブラウン運動であるが，これについては 3.4 節で少し詳しく説明する．

3.2.3 酔歩，加法過程

$\{X_n\}$ を独立な実数値確率変数列で，各 n ごとに $E|X_n| < \infty$, $E[X_n] = 0$ であるとする．このとき，

$$Y_n = \sum_{k=0}^{n} X_k \quad (X_0 = 0) \tag{3.3}$$

で生成される系列 $\{Y_n\}$ を（**1 次元**）**酔歩**という．酔歩は以下に挙げる性質（独立増分性，**マルコフ** (Markov) **性**，**マルチンゲール**）を全て併せ持つ典型的な確率系列であるが，中でも注目すべき性質は；引数の組 $k < l \le m < n$ について，$Y_n - Y_m$ と $Y_l - Y_k$ が独立であることで，このような性質を持つ系列を**独立増分系列**あるいは**加法系列**という．連続引数の場合は**加法過程**という．すなわち，共通部分を持たない区間列 $[s_i, t_i)$, $(t_i \le s_{i+1})$ について，連続引数の確率過程 $\{X_t\}$ の各区間での増分 $\Delta_i X = X(t_i) - X(s_i)$ $(1 \le i \le n)$ が独立になるとき，X は加法過程であるという．

3.3 マルチンゲール

$\{Y_n\}$ を 3.2.3 項の式 (3.3) で定義した酔歩としよう．これに付随して，σ-加法族 $\mathcal{F}_n = \sigma\{Y_m; m \le n\} \subset \mathcal{F}$ からなる増大列 $\{\mathcal{F}_n\}$ を考え，これを確率系列 $\{Y_n\}$ から生成される**自然な篩**（natural filtration）ということにする．容易にわかるように酔歩 $\{Y_n\}$ は次の性質を持つ；$m \le n$ について，

$$E[Y_n|\mathcal{F}_m] = Y_m,\quad P - a.s.$$

このような性質を持つ確率系列を (離散パラメータ) マルチンゲールという．マルチンゲールは連続パラメータの場合でも定義される．ここではマルチンゲールの概念と本シリーズで必要とされる範囲の基礎的結果についてまとめておく．

定義 3.3　$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし，$\mathbf{T}$ を時間径数集合，すなわち $\mathbf{T}$ は $\mathbf{R}^1$ の部分区間 $[0, T]$, $(T < \infty)$ かあるいは自然数の集合 $\mathbf{N}$ の部分集合のどちらかを表すものとする．各 $\mathbf{T} \ni t$ ごとに $\mathcal{F}$ の部分 σ-集合体 $\mathcal{F}_t$ が定まり，次の性質 (f) を持つときこの部分 σ-集合体の族 $\{\mathcal{F}_t,\ t \in \mathbf{T}\}$ をフィルトゥレーション，あるいは情報の篩とよび，$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ を**フィルター付き確率空間**という．

(f)　　$\mathbf{T}$ 内の 2 点 $s < t$ に対して，$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$.

フィルター付き確率空間などタバコのコピーじみて滑稽であるが，それはともかく**フィルトゥレーション**は原語 "filtration" の直接的借用でありいかにも発音しにくく不自然である．そこで本書では試みとしてフィルター $\{\mathcal{F}_t\}$ を**情報の篩**とよぶことにする．

定義 3.4　(1)　$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ を篩付き確率空間の上で定義された確率過程 $\{X_t, t \in \mathbf{T}\}$ が次の 3 条件 (m1)～(m3) を満たすとき，マルチンゲール（場合によっては，$\mathcal{F}_t$-マルチンゲール）という．

(m1)　各 $t \in \mathbf{T}$ ごとに $\{X_t\}$ は $\mathcal{F}_t$-可測である．

(m2)　全ての t において可積分 $(E[|X_t|] < \infty)$ である．

(m3)　$s \le t$ であるとき，確率 1 で，$E[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s$ が成り立つ．

(2)　上の (m3) のかわりに，次の (m3)$'$ が成り立てば**劣マルチンゲール** (sub-martingale),

(m3)$'$　確率 1 で，$E[X_t|\mathcal{F}_s] \ge X_s$.

逆に (m3)$''$ であれば**優マルチンゲール** (super-martingale) であるという．

(m3)$''$　確率 1 で，$E[X_t|\mathcal{F}_s] \le X_s$.

マルチンゲールという性質は将来値 X_t の，現在時点 $s(\le t)$ までの履歴 $\mathcal{F}_s$ ($s \le t$) に基づく，条件付き期待値が現在値 X_s に落ち着くことを示しており，このゆえに公平なゲームにおける利得変化のモデルとして理解されている．したがって期待値 $E\{X_t\}$ は t について一定値であるが，劣（優）マルチンゲールでは期待値 $E\{X_t\}$ は t の増大と共に増大（減少）していくことに注意しておく．劣マルチンゲールはマルチンゲールにちょっとした変形を加えることで出現する．

例 3.1　$\{X_t\}$ をマルチンゲールとし，$\varphi(x)$ を凸関数で　$E[|\varphi(X_t)|] < \infty$ とする．このとき，$\varphi(X_t)$ は同じ情報の篩 $\{\mathcal{F}_t\}$ に関して劣マルチンゲールとなる．実際，イェンゼンの不等式（第 1 章の補題 1.4）より，

$$E[\varphi(X_t)|\mathcal{F}_s] \le \varphi(E[X_t|X_s]) = \varphi(X_s), \quad P-a.s.$$

を得る．したがって，例えば，$|X_t|$, X_t^2, $\max\{X_t - K, 0\}$ ($K =$ 定数) などは劣マルチンゲールになる．

例 3.2　$\{X_n\}$ を正規分布 $N(0, \sigma^2)$ に従うベルヌイ列とする．このとき

$$Z_n = \exp\left\{\sum_{k=1}^{n} X_k - (\frac{n}{2})\sigma^2\right\}$$

とおけば，$\{Z_n, \{\mathcal{F}_n\}\}$ はマルチンゲールになる，ただし $\mathcal{F}_n$ は $\{X_n\}$ が生成する自然な篩である．

実際，$X \sim N(0, \sigma^2)$ であることより，

$$E\left[\exp\left\{X_k - \frac{1}{2}\sigma^2\right\}\right] = 1.$$

一方，$m < n$ としたとき，$\{X_n\}$ の独立性と等式，

$$Z_n = Z_m \cdot \exp\left\{\sum_{k=m+1}^{n} X_k - \frac{n-m}{2}\sigma^2\right\}$$

に注意すれば，

$$\begin{aligned} E[Z_n|\mathcal{F}_m] &= Z_m E\left[\exp\left\{\sum_{k=m+1}^{n} X_k - \frac{n-m}{2}\sigma^2\right\}\middle|\mathcal{F}_m\right] \\ &= Z_m \prod_{k=m+1}^{n} E\left[\exp\left\{X_k - \frac{1}{2}\sigma^2\right\}\right] = Z_m \end{aligned}$$

となり結論を得る．

ここでよく使う用語を導入しておく．情報の篩，すなわち σ-集合体の増大族，$\{\mathcal{F}_n\}$ が与えられているとする．確率系列 A_n は各 n ごとに $\mathcal{F}_{n-1}$-可測である場合に**可予測**（あるいは**予測可能**）（predictable あるいは previsible）であるという．連続径数の確率過程 $A_t, (t \geq 0)$ の場合も同様である．増大族 $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ が与えられたとして，各 t ごとに A_t が $\mathcal{F}_{t-}$-可測である場合，A_t は可予測であるという，ただし；$\mathcal{F}_{t-} = \bigcup_{s<t} \mathcal{F}_s$.

次の結果は分解定理（あるいは，補正定理）として知られている．

定理 3.3 X_n を $(\{\mathcal{F}_n\}, P)$ 劣マルチンゲールとすれば，X_n は次のようにマルチンゲール Y_n と可予測な増大系列 A_n の和として一意的に分解される；$X_n = Y_n + A_n$.

実際，次の手順で構成される増大列 $\{A_n\}$ は条件を満たすことがわかる．

$$A_0 = 0, \quad A_n = A_{n-1} + E[X_n - X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}]$$

註 3.1 連続径数の劣マルチンゲール $\{X_t, t \geq 0\}$，$\mathcal{F}_t$ に対しても上と同様な結果が成り立つ．

定理 3.4（P.Meyer） 一様可積分な劣マルチンゲール $\{X_t\}$ はマルチンゲール M_t と可予測な増大過程 A_t の和として一意的に分解される；

$$X_t = M_t + A_t$$

マルチンゲールはもともと賭け事の公平性や戦略に関連する議論の途上で現れてきた概念であるが，第 4 章で見るように確率解析の基本的素材でもある．紙数の都合で証明は省くが，ここではファイナンス理論でよく使われる次の三つの性質を示しておくことにする．簡単のために離散パラメータの場合 ($\mathbf{T} = \mathbf{N} \cup 0$) について述べるが，連続パラメータの場合 ($\mathbf{T} = [0, T]$) にも同様の結果が成り立つことを注意しておく．

定理 3.5（収束定理） $\{X_n\}$ が $\{\mathcal{F}_n\}$-劣マルチンゲールで，次の条件；

$$\sup_n E[X_n^+] < \infty, \quad x^+ = \max\{x, 0\}$$

を満たすならば，$\{X_n\}$ は概収束する．

注 3.2 上の定理 3.5 と第 1 章既出の註 1.6 および，定理 1.4 を組み合わせれば次のことがわかる．

系 3.1 劣マルチンゲール $\{X_n\}$ は一様可積分 (第 1 章参照) ならば概収束し，極限 $X_\infty := \lim_{n\to\infty} X_n$ も可積分で，

$$E\{X_\infty | \mathcal{F}_n\} = X_n, \ P-a.s.$$

が成り立つ．

次の結果はコルモゴロフの不等式（補題 2.1）を一般化したものである．証明は附録 9.2 に付けておく．

定理 3.6（劣マルチンゲール不等式） $\{X_n\}$ を $\{\mathcal{F}_n\}$-劣マルチンゲールとする．任意の正数 c について次の不等式が成立する．

$$P\left(\max_{1\le n\le N} X_n > c\right) \le \frac{1}{c}E[X_N^+] \tag{3.4}$$

ここに，$x^+ = \max(x, 0)$ である．

X がマルチンゲールであれば $|X|$ は劣マルチンゲールであるから，上の結果より次の不等式が得られることを注意しておく．

$$P\left(\max_{1\le n\le N} |X_n| > c\right) \le \frac{1}{c}E[|X_N|]$$

連続パラメータの劣マルチンゲールに対しても上の定理 3.7 と同様の結果が成り立つ．

定理 3.7 $\mathbf{T} = [0, T]$ とし，$\{X_t\}$ を 篩 $\{\mathcal{F}_t\}$ に関する劣マルチンゲールで，連続な見本関数を持つものとする；

$$P\{\omega|\mathbf{T} \ni t \to X_t(\omega) \text{ が連続 }\} = 1$$

このとき，任意の正数 c と任意の $t \in \mathbf{T}$ について次の不等式が成立する．

$$P\left(\max_{0\le s\le t} X_s > c\right) \le \frac{1}{c}E[X_t^+]. \tag{3.5}$$

いま一つ重要な定理を紹介するために**停止時刻**という概念を説明しておく必要がある．0 あるいは自然数値をとる確率変数 $\tau(\omega)$ は条件；$\{\tau \le n\} \in \mathcal{F}_n$, を満たすとき $\{\mathcal{F}_n\}$- 停止時刻 (stopping time) であるという．連続径数の確率過程に対応する場合も同様に定義される；

非負の実数値をとる確率変数 $\tau(\omega)$ が条件,

$$\{\omega|\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t, \quad (t > 0)$$

を満たすとき，これを $\{\mathcal{F}_t\}$ 停止時刻という．

例 3.3 Y_n を酔歩とせよ．$\mathcal{F} = \sigma\{Y_k; k \le n\}$ とおく．定数 $a > 0$ について $\tau = \min\{k; Y_k \ge a\}$ とおけば，これは $\{\mathcal{F}_n\}$ 停止時刻になっている．実際,

$$\{\tau \leq n\} = \{X_1 \geq a\} \cup \bigcup_{k=2}^{n} \{X_1 < a, \cdots, X_{k-1} < a, X_k \geq a\} \in \mathcal{F}_n$$

このような型の停止時刻を到達時刻（hitting time）ともいう．

離散径数の場合に戻して，τ を $\{\mathcal{F}_n\}$ 停止時刻とする．τ に対応して σ-集合体 $\mathcal{F}_\tau$ を次で構成する；

$$\mathcal{F}_\tau = \sigma\{A \in \mathcal{F}; A \cap \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n \ {}^\forall n\}.$$

定理 3.8（任意抽出定理） X_n を $\{\mathcal{F}_n\}$-マルチンゲールとし，τ_1, τ_2 を $\tau_1 \leq \tau_2$ $(P-a.s.)$ であるような停止時刻とする．このとき次の関係式が成り立つ；

$$E[X_{\tau_2}|\mathcal{F}_{\tau_1}] = X_{\tau_1} \quad (P-a.s.)$$

註 3.3 連続径数の劣マルチンゲールに対しても上と同様な結果が成り立つ．すなわち，X_t を右連続で左極限を持ち，一様可積分な劣マルチンゲールとする．τ_1，τ_2 を $P(\tau_1 \leq \tau_2) = 1$ である $\mathcal{F}_t$-停止時刻とすれば，次の不等式が成り立つ；

$$E[X_{\tau_2}|\mathcal{F}_{\tau_1}] \geq X_{\tau_1} \qquad (P-a.s.)$$

ただし，$\mathcal{F}_\tau$ は次で定まる σ-集合体である；

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \Omega | A \cap \tau \leq t \in \mathcal{F}_t \ \ {}^\forall t \in \mathbf{T}\}$$

詳細は適当な解説書（例えば，文献 4)）を見られたい．

マルチンゲール関連の不等式として次の結果もよく使われる；

定理 3.9（ドゥーブの不等式） $\{M_t\}, (t \leq T)$ を連続な見本関数を持つ $\mathbf{M}_2$-級の $\{\mathcal{F}_t\}$ マルチンゲールとすれば次が成り立つ．

$$E\left[\sup_{0 \leq t \leq T} |M_t|^2\right] \leq 4E[|M_T|^2] \qquad (3.6)$$

証明　実際，$|M_t|$ は正の劣マルチンゲールであるから，M_t の可分性より，正の劣マルチンゲール $\{X_n; 1 \le n \le N\}$ について，目的の不等式

$$E[(X_n^*)^2] \le 4E[X_n^2], \quad X_n^* := \max_{1\le k\le n} X_k$$

が成り立つことを示せばよいが，それは次の計算より容易にわかる; X_n^* の分布関数を $F(x) := P(X_n^* \le x)$ とおけば，部分積分法と連続径数の劣マルチンゲールに対する任意抽出定理（cf. 註 3.3）より，

$$\begin{aligned}
E[(X_n^*)^2] &= \int_0^\infty x^2 dF(x) = -\lim_{A\to\infty}\int_0^A x^2 d(1-F(x)) \\
&= \lim_{A\to\infty}\left\{2\int_0^A x(1-F(x))dx - (1-F(x))x^2\Big|_0^A\right\} \\
&\le 2\int_0^\infty x(1-F(x))dx = 2\int_0^\infty xP(X_n^* > x)dx \\
&= 2\int_0^\infty xE[\mathbf{1}_{X_n^*>x}] \le 2\int_0^\infty E[X_n^*; X_n^* > x]dx \\
&\le 2\int_0^\infty E[X_n; X_n^* > x]dx \quad (\text{任意抽出定理より}) \\
&\le 2E\left[X_n\int_0^{X_n^*} dx\right] \\
&= 2E[X_n^* X_n] \le 2\sqrt{E[(X_n^*)^2]E[X_n^2]}
\end{aligned}$$

が従い，これより結論を得る．　□

3.4　ブラウン運動——定義とその特徴

議論の主役となる確率過程，ブラウン運動の基本的性質についてまとめておく．まず，

定義 3.5　実数値確率過程 $W_t (t \ge 0)$ がブラウン運動であるとは次の条件を満たすものをいう；

(b1)　ガウス過程である．すなわち，任意個数 n で，任意に選んだ点の組 $\{t_1, t_2, \cdots, t_n\}$ に対して $\{W_{t_1}, W_{t_2}, \cdots, W_{t_n}\}$ が n 次元正規分布に従う．

(b2)　$E(W_t - W_s)^2 = t - s \quad (t > s)$

(b3)　$P(W_0 = 0) = 1$

また 1 次元ブラウン運動の n 個の独立なコピー，$W^1, W^2, \cdots, W^n$ を成分とする $\mathbf{R}^n$ 値確率過程 $\mathbf{W} = {}^t(W^1, W^2, \cdots, W^n)$ を n 次元ブラウン運動という．

多次元ブラウン運動の各成分は 1 次元ブラウン運動であるから，以下 1 次元のブラウン運動についてその特徴を調べていくことにする．

(b1), (b2) から $W_t - W_s$ は分散 $t - s$, 平均 0 の正規分布 $N(0, t-s)$ に従う．まず簡単な事柄として

補題 3.1　$N(0, \sigma^2)$ に従う確率変数 X について，次の関係式が成り立つ．

$$E[X^{2n}] = (2n-1)!!\sigma^{2n}, \quad E[X^{2n+1}] = 0, \quad E|X| = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma$$

証明　実際，最初の結果については，

$$\begin{aligned}
E[X^{2n}] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} \exp\left\{\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right\} dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{0}^{\infty} x^{2n} \exp\left\{\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right\} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}(\sqrt{2}\sigma)^{2n} 2\int_0^\infty x^{2n} e^{-x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(\sqrt{2}\sigma)^{2n}\int_0^\infty t^{n-1/2}e^{-t}dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}(\sqrt{2}\sigma)^{2n}\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

ここに，$\Gamma(p)$ はガンマ関数で，

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty t^{p-1}e^{-t}dt \qquad (p > 0)$$

で与えられる．Γ 関数の性質

$$\Gamma(p) = (p-1)\Gamma(p-1), \ (p > 1) \quad \text{および} \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

より，$\Gamma(n + 1/2) = (2n-1)!!/2^n\sqrt{\pi}$ が得られるから，これを上の結果に代入して所期の結果を得る．

また最後の式については；

$$E|X| = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_0^\infty x\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}dx$$
$$= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma\int_0^\infty \frac{d}{dx}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma$$

□

したがって，増分 $W_t - W_s$ $(s \le t)$ について次の評価を得る．

$$E[(W_t - W_s)^{2n}] = (2n-1)!(t-s)^n, \quad E[(W_t - W_s)^{2n+1}] = 0,$$
$$E[|W_t - W_s|] = \sqrt{\frac{2(t-s)}{\pi}}$$

また 性質 (b1),(b2) からブラウン運動は独立増分を持つこともわかる，すなわち，

命題 3.1　共通部分を持たない区間 $[s,t)$，$[u,v)$ $(s \le t \le u \le v)$ 上の増分 $\Delta_t^s W = W_t - W_s$，$\Delta_v^u W = W_v - W_u$ は独立である．このような確率過程を加法過程という．

証明　$\{\Delta_v^t W\}$ は正規確率変数系であったから，第 2 章で挙げた例 2.3 より，$\Delta_v^u W$ と $\Delta_t^s W$ との独立性を示すには両者が無相関であることを示せばよい．ブラウン運動の性質，$E[W_s W_t] = \min\{s,t\}$ に注意して計算すれば，

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(\Delta_t^s W, \Delta_v^u W) &= E[\Delta_t^s W \cdot \Delta_v^u W] \\ &= E[W_t W_v - W_t W_u - W_s W_v + W_s W_u] \\ &= t - t - s + s = 0\end{aligned}$$

となり結論を得る．　□

各時刻 t までのブラウン運動の全ての可能な履歴を記述する集合体として次のものが考えられる，

$$\mathcal{F}_t^w = \sigma\{W_s; s \le t\}, \quad \mathcal{F}^W = \bigcup_{t \ge 0} \mathcal{F}_t^w$$

が通常は次で与えられるこれよりちょっと大きい σ 集合体を用いる；

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^w \cup \mathcal{N}$$

ここに $\mathcal{N}$ は確率が 0 である集合の全ての部分集合の集まりである．このとき，$\mathcal{F}_t \supset \mathcal{F}_s$ $(s \le t)$ となっているが，以後このような増加していく σ-加法数の系列 $\{\mathcal{F}_t,\ t \ge 0\}$ を（ブラウン運動情報の）**自然な篩（フルイ）**[*1]とよぶことにする．命題 3.1 より $(W, \{\mathcal{F}_t\})$ はマルチンゲールになることがわかる．実際，$s \le t$ に対して，

$$\begin{aligned} E[W_t|\mathcal{F}_s] &= E[(W_t - W_s) + W_s|\mathcal{F}_s] = W_s + E[W_t - W_s|\mathcal{F}_s] \\ &= W_s + E[W_t - W_s] = W_s, \quad (P - a.s.) \end{aligned}$$

さらにブラウン運動の性質を見ていこう．

命題 3.2　$W.$ は確率 1 で連続な軌道を持つ;

$$P\{\omega; t \to W_t(\omega) \in C^0([0,1])\} = 1$$

C^0 は $[0,1]$ 上の連続関数全体を表す記号である．このことはまた「ブラウン運動のほとんど全ての見本関数は連続関数である」というふうにも表現される．

よい機会であるから，確率過程の見本関数の連続性を判定する便利な事実を証明なしに挙げておこう．

定理 3.10（コルモゴロフの判定条件）　実数値確率過程 X_t に対して次の条件を満たすような定数 α, $\beta > 0$ が存在するとき，

$$E[|X_t - X_s|^\alpha] \le |t-s|^{1+\beta}$$

X_t は確率 1 で連続な軌道を持つ．

ブラウン運動の場合は，例えば $E[|W_t - W_s|^4] = 3|t-s|^2$ であるから，コルモゴロフの判定条件よりほとんど全ての軌道が連続であることが従う．

[*1]あるいはナチュラル・フィルトゥレーションともいう．ただし先にも書いたが，発音しにくい外国語をそのままにしてフィルトゥレーション（filtration）とよぶことに抵抗がある．

註 3.4 実は見本過程の連続性の位数 (ヘルダー連続性の位数) まである程度わかるのであるが詳細は省略する．

確率過程 $\{X_t,\ t \in \mathbf{T}\}$ が与えられているということは，実数値関数全体の集合 $\Omega = R^{\mathbf{T}}$ ($\mathbf{T} =$ パラメータの空間）と筒集合を核に構成された履歴集合体 $\mathcal{F}$ の上に適当な確率 $P(\cdot)$ が導入されているということであるから，上の事実はブラウン運動を規定する確率 P が性質 $P(C^0) = 1$，ただし，C° は連続関数の全体，をもっているということでもある．

ところで，$E[|W_t - W_s|^2] = |t - s|$ であるから，極めておおざっぱに言えばブラウン運動の見本関数は位数 $\frac{1}{2} - 0$ のヘルダー連続性を持つことが窺える．これをもっと丁寧に言うと，

命題 3.3（レヴィ（P.Lévy）の定理）

$$P\left(\limsup_{h\to 0} \sup_{0<h_1<h, 0\le t\le 1-h_1} \frac{|W_{t+h_1} - W_t|}{\sqrt{h_1 \log \frac{1}{h_1}}} = 1\right) = 1$$

微分の定義から容易にわかるように，位数が 1 未満のヘルダー連続な関数は微分ができない．ブラウン運動の見本関数は連続であるが，至るところ微分不可能というせっぱつまった性質を持っているのである．これを無理やり微分し，$\dot{W}_t = \frac{d}{dt}W_t$， 確率超過程としてとらえたものが不規則外乱の数学モデルとしてお馴染みの白色雑音（正式には**白色ガウス雑音**）であり，工学や数理物理学において頻繁に使われているものである．

次の性質もよく使われる．

命題 3.4　$\Delta = \{0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n \le T\}$ を区間 $[0, T]$ の分割とし，$|\Delta| = \max_k |t_{k+1} - t_k|$ とする．

(1)　$$\lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{t_k} |W_{t_{k+1}} - W_{t_k}| = +\infty \quad (P - a.s.)$$

(2)　$$\lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{t_k} |W_{t_{k+1}} - W_{t_k}|^2 = T \quad (P - a.s.)$$

性質（1）は，ブラウン運動の見本関数が有界変動ではないことを示しており，後で議論する確率解析の構築において重要な与件となる．(2) の性質を「ブラウン運動は**有限な 2 次変動量**（quadratic variation）を持つ」と表現する．(1),(2) について簡単な証明を付けておこう．

証明　(1) $T=1$ の場合に示せば十分であるが，さらに簡単のために 2^n 個の分点からなる特別な分割 $\Delta_n = \{2^{-n}k,\ 0 \le k \le 2^n - 1\}$ について示しておく．この分割に対応して，

$$V_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} |\xi_{n,k}|, \quad xi_{n,k} = W(2^{-n}(k+1)) - W(2^{-n}k)$$

を考える．分割 Δ_{n+1} は分割 Δ_n の細分になっている（前者は後者の全ての分点を含んでいる）から，$\{V_n\}$ は単調増大列であることをまず注意しておこう．またブラウン運動の独立増分性より $\{\xi_{n,k},\ 0 \le k \le 2^n - 1\}$ は独立であるから，

$$E[e^{-V_n}] = E[\prod_{k=1}^{2^n} e^{-|\xi n,k|}] = \{E(e^{-|\xi_{n,k}|})\}^{2^n}$$

ところで，$\eta \sim N[0, \sigma^2]$ である確率変数 η について，次の不等式

$$E[e^{-|\eta|}] \le 1 - \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma^2}{2}$$

が成立することが簡単にわかる．

一方，$\xi_{n,k}$ は同一の分布 $N(0, 2^{-n})$ に従っているから，上の不等式を適用すれば，

$$E[e^{-|\xi_{n,k}|}] \le 1 - \frac{2^{-n/2}}{2} + \frac{2^{-n}}{2}$$

したがって，

$$E[e^{-V_n}] \le \left\{1 - \frac{2^{-n/2}}{2} + \frac{2^{-n}}{2}\right\}^{2^n}$$

$$\le \left\{\left(1 - \frac{2^{-n/2}}{2} + \frac{2^{-n}}{2}\right)^{2^{n/2}}\right\}^{2^{n/2}}$$

ここで，

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2^{-n/2}}{2}+\frac{2^{-n}}{2}\right)^{2^{n/2}}=e^{-1/2}<1$$

に注意すれば，$\lim_{n\to\infty}E[e^{-V_n}]=0$ が得られるが，$\{e^{-V_n}\}$ は単調減少列であることにより，命題の結論

$$P\left(\lim_{n\to\infty}V_n=\infty\right)=1$$

が従う．

(2) 上と同様に $T=1$ および，2 進分割 $\Delta_n=\{t_k=k2^{-n},0\le k\le 2^h-1\}$ の場合について示す．ブラウン運動の増分を記号，$\Delta_k^n W=W((k+1)2^{-n})-W(k2^{-n})$ と記すことにする．

$$E[\Delta_k^n W]=0,\quad E[(\Delta_k^n W)^2]=2^{-n},\quad \mathrm{Var}((\Delta_k^n W)^2)=5\cdot 2^{-2n}$$

であるから，

$$\delta_n:=\sum_{k=0}^{2^n-1}(\Delta_k^n W)^2-1=\sum_{k=0}^{2^n-1}\{(\Delta_k^n W)^2-E[\Delta_k^n W]^2\}$$

したがって，

$$E[(\delta_n)^2]=\sum_{k=0}^{2^n-1}\mathrm{Var}((\Delta_k^n W)^2)=5\cdot 2^{-n}$$

そこで，$A_n:=\{|\delta_n|>1/n\}$ とおけば，チェビシェフの不等式より，

$$P(A_n)\le n^2E[|\delta_n|^2]=5n^2 2^{-n}$$

明らかに，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}<\infty$ であるから，$\sum_n P(A_n)<\infty$ である．よって，ボレル–カンテリの第 1 補題より

$$P\left(\limsup_{n\to\infty}A_n\right)=0$$

すなわち，十分大きな n については，常に確率 1 で $|\delta_n|\le 1/n$ が成り立つことがわかる． □

3.5 ブラウン運動——その他の性質

実数軸上の可測集合 $\mathbf{A} \in \mathcal{B}_{R^1}$ について次の確率を考えてみる，$P\{W_t \in \mathbf{A}|\mathcal{F}_s\}$ $(s \leq t)$．$W_t = W_t - W_s + W_s$ であり，増分 $W_t - W_s$ は W_u $(u \leq s)$ と独立であったから（cf. 命題 3.2）条件として与えられている情報 $\mathcal{F}_s$ のうち，上の確率計算において実際に意味があるのは W_s の実現値のみである．したがって，

$$P(W_t \in \mathbf{A}|\mathcal{F}_s) = P(W_t \in \mathbf{A}|W_s)$$

が成り立つ．前節で紹介したように，このような性質を持つ確率過程を一括して**マルコフ過程**という．将来の挙動に関する予測確率が現在値のみに依存するという性質は最も単純な因果律であり，例えば解の一意性が保証されているような微分方程式の初期値問題で表される現象も同類である．数理科学において微分方程式論がどれほど広い適用分野を持つかを見ればわかるように，マルコフ性はブラウン運動に限らず実に多くの確率現象に共有される．これについては後でいくつかの具体例を見ることにする．

マルコフ過程 $\{X_t, t \in T\}$ においては, $P(A|X_s = x)$ $(A \in \mathcal{F}_t)$ といった形の条件付き確率が重要な役割を果たす．以後この確率を $P_{(s,x)}(A)$ と記し，これに関する期待値演算を $E_{(s,x)}\{\cdot\}$ といった記号で表すことにする．
特に，$P(X_t \leq y|X_s = x)$ が密度

$$p(s,x,t,y) = \frac{d}{dy}P(X_t \leq y|X_s = x)$$

を持つ場合，これを $\{X_t\}$ の**推移確率密度関数**という．任意の 3 点 $s \leq u \leq t$ について，

$$\begin{aligned}
P(X_t \leq y|X_s = x) &= P(X_t \leq y, X_u \in R^1|X_s = x) \\
&= \int_{R^1} P(X_t \leq y, X_u \in dz|X_s = x) \\
&= \int_{R^1} P(X_t \leq y|X_u = z, X_s = x)P(X_u \in dz|X_s = x)
\end{aligned}$$

$$= \int_{R^1} P(X_t \le y | X_u = z) P(X_u \in dz | X_s = x)$$

が成り立ち，これより密度関数は次の関係式を満たすことがわかる．

$$p(s,x,t,y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(s,x,u,z)p(u,z,t,x)dz$$

これを**チャップマン–コルモゴロフ** (Chapman-Kolmogorov) **の関係式**という．

マルコフ過程 $\{X_t, t \in T\}$ の全ての情報はこの推移確率密度関数に含まれている．1次元ブラウン運動の場合，$W_t - W_s$，W_{t-s} が共に同じ分布 $N(0, t-s)$ に従うことに注意して，

$$\begin{aligned} &P(W_t \le y | W_s = x) \\ &\quad = P(W_t - W_s + W_s \le y | W_s = x) = P(W_t - W_s + x \le y | W_s = x) \\ &\quad = P(W_t - W_s \le y - x) = P(W_{t-s} \le y - x) \\ &\quad = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{-\infty}^{y-x} \exp\left(-\frac{u^2}{2(t-s)}\right) du \end{aligned}$$

これより，

$$p(s,x,t,y) = \frac{d}{dy} P(W_t \le y | W_s = x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2(t-s)}\right\}$$

を得る．ここで，$p(s,x,t,y) = p(t-s,x,y)$ の形になっていること，すなわち，

$$p(u,x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi u}} \exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{2u}\right\}$$

であることに注意しておく．このように推移確率が時間径数については，2 点 $s \le t$ 間の時間差 $t - s$ のみに依存するマルコフ過程を（時間的）一様マルコフ過程（temporaly homogeneous Markov process）という．

3.6 ブラウン運動の作り方

応用的問題では，ブラウン運動や確率微分方程式の解のシミュレーションをすることが重要な課題になる．第 1 章では独立で同一の分布に従う確率変数列

$\{X_n\}$ の存在について既に見たが，ここではこのことを根拠にしてブラウン運動の具体的な作り方を考えてみる．

3.6.1 フーリエ級数による構成

$\{Z_n\}$ を標準正規分布 $N(0,1)$ に従う独立確率変数列とし，$\{\varphi_n(t)\}$ を 2 乗可積分な実関数の空間 $L^2([0,1])$ における正規直交底とする．すなわち，

$$(\varphi_m, \varphi_n) = \int_0^1 \varphi_m(t)\varphi_n(t)dt = \delta_{m,n}$$

を満たす基底であるとする．次のランダムな級数を考える；

$$W(t,\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(\omega) \int_0^t \varphi_n(s)ds \tag{3.7}$$

面倒であるから，以下ランダムパラメータ ω は省略することにするが，この級数は (t,ω) について 2 乗平均収束，すなわち $L([0,1]\times\Omega)$ 内の級数として収束していることがわかる．実際，$W_n(t) = \sum_{k=1}^n Z_k \int_0^t \varphi_k(s)ds$ とおけば，$E\{Z_m Z_n\} = \delta_{m,n}$ であることに注意して，

$$||W_n - W_m||_{L^2}^2 = E\int_0^1 |W_m(t) - W_n(t)|^2 dt = \sum_{k=m+1}^{n} \int_0^1 \left(\int_0^t \varphi_k(s)ds\right)^2 dt$$

一方，パーセバル (Parseval) の等式 (附録 9.7 参照) とディニ (Dini) の定理 (附録 9.8 参照) より，$[0,1]$ 上で一様に

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^t \varphi_k(s)ds\right)^2 = \int_0^1 \mathbf{1}_{[0,t]}^2(s)ds = t$$

であることがわかるから，これより $\lim_{m,n\to\infty} ||W_m - W_n|| = 0$ が従う．

この極限 $W(t) = \lim_{n\to\infty} W_n(t)$ がブラウン運動になる．実際，係数 $\{Z_n\}$ は全て独立な正規確率変数であるから，$W(t)$ がガウス過程で $EW(t) = 0$ であることは明らかであろう．さらに，共分散 $\mathrm{Cov}(W(s), W(t))$ についてもパーセバルの等式から，

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}\{W(s),W(t)\} &= E[W(s)W(t)] = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^t \varphi_n(r)dr\right)\left(\int_0^s \varphi_n(r')dr'\right)\\ &= \min\{s,t\}\end{aligned}$$

となり，これより結論を得る．

註 3.5 実は正規直交底 $\{\varphi_n(t)\}$ のとり方によらず，級数 $W(t)=\sum_{n=1}^{\infty} Z_n \int_0^t \varphi_n(s)ds$ は確率 1 で $t\in[0,1]$ について一様収束することが知られている（**伊藤–西尾の定理**．後出，第 7 章　定理 7.1）．

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in[0,1]}|W(t)-W_n(t)|=0\right)=1$$

ところで，ブラウン運動に関する議論では往々にして $I_t(f)=\int_0^t f(s)dW_s$ の形の積分を考える必要が出てくる．被積分関数 $f(t)$ が乱関数 $f(t,\omega)$ である場合は確率積分とよばれるが，これについては後の章（第 3，6 章）で体系的な議論を展開する．そうでない場合，特に $f(t)\in L^2([0,1])$ である場合は議論が比較的簡単で，$I(f)$ はウィーナー積分とよばれ次のようにして導入される．

(1) f が階段関数の場合；区間 $[0,1]$ の適当な分割 $\Delta=\{0=t_0<t_1<\cdots<t_n=1\}$ と実数の組 $\{f_k, 0\le k\le n-1\}$ があって，

$$f(t)=\sum_{k=0}^{n-1} f_k \mathbf{1}_{J_k}(t),\ J_k=[t_k,t_{k+1})$$

と書ける場合．ただし $\mathbf{1}_A(t)$ は集合 A の特性関数で A の上で 1, それ以外で 0 の値をとる関数である．このとき，

$$I(f)=\int_0^1 f(t)dW_t=\sum_{k=0}^{n-1} f_k\Delta_k W,\quad \Delta_k W=W(t_{k+1})-W(t_k)$$

で積分 $I(f)$ を与える．

(2) このとき，$f\to I(f)$ は線形演算であり，$I(f)$ は正規分布 $N(0,\int_0^1 f^2dt)$ に従う確率変数であることを注意しておく．

(3) 一般の $f \in L^2$ の場合；f に $L^2([0,1])$ の意味で収束する階段関数列 $\{f_n\}$ をとる．$\lim_{n\to\infty}\int_0^1|f(t)-f_n(t)|^2dt=0$ である．このとき $E[(I(f_n)-I(f_m))^2]=||f_n-f_m||^2$ であるから，確率変数列 $\{I(f_n)\}$ は $L^2(\Omega)$ の意味で収束する．この極限を $I(f)$ と定義する．

簡単な計算により $W(t)$ を定義した級数 (3.7) における係数 Z_n は次で与えられることがわかる； $Z_n=\int_0^1\varphi_n(t)dW_t$. すなわちブラウン運動 $W(t)$ は次のように関数系 $\left\{\int_0^t\varphi_n(s)ds\right\}$ で展開されていることがわかる；

$$W(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^1\varphi_n(s)dW_s\right)\left(\int_0^t\varphi_n(s)ds\right) \tag{3.8}$$

$\{\varphi_n\}$ が以下に記すハール関数系である場合，関数系 $\left\{\int_0^t\varphi_n(s)ds\right\}$ はシャウダー基底 (Schauder basis) とよばれ，連続関数はこの関数系により級数展開されることが知られている．上の関係式 (3.8) の両辺を形式的に t で微分すれば，

$$\frac{d}{dt}W(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^1\varphi_n(s)dW_s\right)\varphi_n(t)$$

となり，これはブラウン運動の微分過程 $\frac{d}{dt}W(t)$ すなわち白色ガウス雑音をフーリエ級数に展開したものと見なせる．

3.6.2 応用——折れ線近似

$L([0,1])$ の正規直交底としてハール (Haar) 関数系 $\{H_{j,k}(t), 1\le j\le 2^k-1,\ k\ge 1\}$ をとってみる．ただし，ハール関数系とは次で定義されるものである；

$$\begin{aligned}
H_{1,1}&=1,\\
H_{j,k}&=2^{k/2}\{\mathbf{1}_{J_{j,k}^{+}}(t)-\mathbf{1}_{J_{j,k}^{-}}(t)\}\\
J_{j,k}^{+}&=[2^{-(k+1)}2j,2^{-(k+1)}(2j+1)]\\
J_{j,k}^{-}&=[2^{-(k+1)}(2j+1),2^{-(k+1)}(2j+2)]
\end{aligned} \tag{3.9}$$

この場合にブラウン運動の級数表現 (3.8) がどのような形になるのかを見ておこう；

ハール関数の引数が (j,k) と二つあるので，級数 $W(t)$ の部分和 W_n を次で与えることにする．

$$W_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{2^k-1} Z_{j,k}\tilde{H}_{j,k}(t), \quad \tilde{H}_{j,k}(t) = \int_0^t H_{j.k}(s)ds$$

ここで，

$$\begin{aligned} Z_{j,k} &= \int_0^1 H_{j,k}(t)dW_t \\ &= 2^{k/2}[\{W(2^{-(k+1)}(2j+1)) - W(2^{-(k+1)}2j)\} \\ &\quad -\{W(2^{-(k+1)}(2j+2)) - W(2^{-(k+1)}(2j+1))\}] \end{aligned}$$

に注意しつつ，ちょっと面倒な計算をして整理すれば，

$$W_n(t) = W(2^{-n}k) + 2^n\{W(2^{-n}(k+1)) - W(2^{-n}k\}(t - 2^{-n}k)$$
$$(2^{-n}k \le t < 2^{-n}(k+1), \ \ 0 \le k \le 2^n - 1)$$

すなわち，$W_n(t)$ はブラウン運動を 2 進分割点 $2^{-n}k$ で結ぶ折れ線で近似したものになっている．

3.6.3 酔歩による近似的構成

$\{X_n\}$ を平均 0，分散 $=1$ の独立で同一の分布に従う確率変数列とする．

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} X_k$$

とおけばこれは X_n を歩幅とする酔歩を表す．中心極限定理（第 1 章参照）より

$$Y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n} X_k$$

で定まる確率変数列 $\{Y_n\}$ は，$n \to \infty$ のとき標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数に法則収束することを知っているが，さらに強い結果が成り立つ；$t \in [0,1]$ に対して，

$$W_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{[nt]} X_k + \frac{(nt - [nt])}{\sqrt{n}} X_{[nt]}$$

とおけば（ただし $[x]$ はガウス記号であり x を超えない最大整数を表す）乱関数列 $\{W_n(t), t \in [0,1]\}$ は $n \to \infty$ とするときブラウン運動 $W(t)$ に法則収束することが知られている．すなわち，適当な確率空間 $(\Omega', \mathcal{F}', P')$ で定義されたブラウン運動 $W(t, \omega')$ があって，W_n の任意の有限次元分布は W のそれに収束する．これは**不変原理** (invariance principle) とよばれる結果であるが，ブラウン運動の見本関数を計算機で手軽にシミュレーションする手法として応用できるであろう．

例えば，一様分布 $U([0,1])$ に従うベルヌイ列 $\{Z_k\}$ が与えられたとしよう．$E[Z] = 1/2$, $\mathrm{Var}(Z) = E[Z^2] - (E[Z])^2 = 1/3 - 1/4 = 1/12$ であるから，新しい列 $\{\Theta_k\}$ を，

$$\Theta = \frac{1}{\sqrt{12}}\left(Z - \frac{1}{2}\right)$$

で導入すれば，$E[\Theta] = 0$, $\mathrm{Var}(\Theta) = 1$．これを使って，

$$W_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{[nt]}\Theta_k + \frac{(nt - [nt])}{\sqrt{n}}\Theta_{[nt]}$$

とおけばブラウン運動の近似列が得られる．ところで上のベルヌイ列 $\{Z_k(\omega)\}$ の実現値 $\{\xi_k\}, (\xi_k = Z(\omega'))$ と見なされる数列を区間 $[0,1]$ 上の一様乱数ということは既に述べたが，この一様乱数列を生成する機能は計算機のプログラム言語に標準関数として組み込まれているので，これを利用して上の手順に従い $w_n(t) = W_n(t, \omega')$ を構成すれば，ブラウン運動の近似列の見本関数が得られることになる．

4

確 率 解 析

ブラウン運動 $\{W_t(\omega),\ t \geq 0\}$ の微分（もちろん形式的だが）$\dot{W} = (dt/d)W_t$ は白色ガウス雑音ともいわれる．このような雑音の影響を受ける力学系の挙動は例えば次のような微分方程式で表されるであろう．

$$\frac{d}{dt}X_t = a(X_t) + b(X_t)\dot{W}_t \quad (0 \leq t \leq 1), \quad X_0 = x_0 \in R^1$$

白色雑音の直接的使用を避けるためにこれを積分形で表すならば，以下のようになる．

$$X_t = x_0 + \int_0^t a(s, X_s)ds + \int_0^t b(s, X_s)dW_s$$

最後の積分項 $\int_0^t b(s, X_s)dW_s$ は今のところ意味不明であるが，その意味が確定すれば確率微分方程式（実は積分方程式）の確かな翻訳が一つ設定されたことになる．ところで，こうした方程式の解 X_t は，もしあるとすれば駆動力であるブラウン運動の時刻 t までの履歴，$\{W_s; 0 \leq s \leq t\}$ と初期値 x_0 の関数として定まるはずであり，したがって右辺第 2 項の係数 $b(t, X_t)$ も可測性について X_t と同様の特徴を持つと思わねばならない．それゆえ我々の最初の課題はこの係数 $b(t, X_t)$ のようにブラウン運動の汎関数として定まる乱関数 $f(t, \omega)$ が与えられたとき，

$$I(f) = \int f(t, \omega)dW_t$$

といった形の積分，確率積分という，を導入することである．まえがきで記したように時刻 t とブラウン運動，あるいはもっと一般にマルチンゲールを基本変量とする微積分解析を確率解析という．確率解析の歴史は伊藤清によって導入された確率積分（今日，伊藤積分とよばれる）と確率微分方程式論から始まった．本章ではその概要を応用者の視点から解説することを試みる．できるだけ

一般の読者を対象としているので，基礎的事柄について正確でかつわかりやすい説明を心掛け，玄人好みの数学的精緻さや深遠さはあまり意に介しないことにした．ただ本章の主題についてさらに進んだ学習を望まれる読者に役立つと思われる項目や結果にはできるだけ言及することにする．

4.1 伊 藤 積 分

先に見たようにブラウン運動のほとんど全ての見本関数は至るところで微分可能でないし，有界変動ですらない；

$$P(\omega;\ [0,1] \ni t \to W_t(\omega)\ \text{は有界変動ではない}) = 1$$

したがって，通常の微積分解析におけるように，問題の積分 $I(f) = \int_0^1 f(t,\omega)dW_t(\omega)$ を各 ω ごとに定まる見本関数 $f(t,\omega)$ の $W(t,\omega)$ に関するステーィルチェス（Stieltjes）積分（附録の 9.6 参照）としてとらえるというやり方はこの場合には通用しない．別の接近の仕方が必要である．ごく特別な場合，すなわち被積分関数がランダムでない（確率パラメータ ω に依存しない）場合はウィーナーによりそうした積分（ウィーナー積分ともよばれる）が導入されていたが，乱関数を被積分関数とする一般の場合に対しては応用できないものであった．しかし被積分関数がランダムであっても，以下に説明する因果性条件を満たせばリーマン型積分としてうまく定義されることが伊藤清によって示され，確率解析理論の幕開けとなった．このゆえに以下に紹介する型の確率積分を伊藤積分という．

冒頭に述べたように，本章の主な目的は次の二つである；

(1) まず上に述べたような性質を持つ乱関数，すなわちブラウン運動に関して因果的な依存性を持つ乱関数 $f(t,\omega)$ に対して，積分 $I(f) := \int_0^1 f(t,\omega)dW_t$ を導入し，その積分（確率積分という）がどのような性質を持つかを調べること．ついで，(2) 確率積分に基づく確率解析，すなわち微積分演算を整理し第5章で学習する確率微分方程式についての準備をしておくこと，である．

4.1.1 因果的乱関数

W_t $(t \geq 0)$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で定義された1次元ブラウン運動とし，前章におけると同様に $\mathcal{F}$ の部分集合体の族，$\{\mathcal{F}_t, t > 0\}$ をブラウン運動が生成する情報の自然な篩とする，すなわち，$\mathcal{F}_t = \sigma\{W_s; s \leq t\}$．自然な篩は次のような右連続性を持つ；

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{u>t} \mathcal{F}_u$$

話の便宜上, $\mathcal{F} = \bigcup_{t>0} \mathcal{F}_t$ であるとしておく．第2章で説明したように, $(t, \omega) \in [0,1] \times \Omega$ について $\mathcal{B}_{[0,1]} \times \mathcal{F}$ 可測であるような（実）数値関数を確率過程とよぶ，ここに $\mathcal{B}_A$ は区間 $A \subset \mathbf{R}^1$ 上のボレル集合体である．確率過程 $f(t, \omega)$ で次の条件を満たすものを本書では**乱関数**とよぶことにし，その全体を $\mathbf{H}$ で表すことにする；

$$P\left(\int_0^1 f^2(t, \omega)dt < \infty\right) = 1$$

乱関数 $f(t, \omega) \in \mathbf{H}$ は次の因果性条件 (C) を満たすとき「**因果的** (causal) **である**という，あるいは $\mathcal{F}_t$-適合 ($\mathcal{F}_t$-adapted) である」ともいう．

仮定　各固定した $t \in [0,1]$ ごとに $f(t, \omega)$ は $\mathcal{F}_t$ 可測な確率変数になる．

特に乱関数 $f(t, \omega)$ は (t, ω) について $\mathcal{B}_{[0,1]} \times \mathcal{F}_t$ 可測であるとき，篩 $\{\mathcal{F}_t\}$ に関して**発展的に可測**（progressively measurable）**である**という．以後，このような性質を持つ因果的な乱関数の全体を $\mathbf{M}$ で表すことにする．さらに次のような関数のクラスを準備しておく．

$\mathbf{H}_2$； $\mathbf{H}$ の要素で (t, ω) について2乗可積分な ものの全体を $\mathbf{H}_2$ と記す，すなわち； $\mathbf{H}_2 = \{f \in \mathbf{H}; E\int_0^1 |f(t, \omega)|^2 dt < \infty\} \subset \mathbf{H}$.

$\mathbf{M}_2$； $\mathbf{H}_2$ の要素で因果的なものの全体を $\mathbf{M}_2$ と記す．$\mathbf{M}_2 \subset \mathbf{M}$ である．

4.1.2　確率積分の導入

因果的乱関数 $f(t, \omega) \in \mathbf{M}_2$ は次の場合**単純であるという**．すなわち，区間 $[0,1]$ の分割 $\Delta = \{0 \leq t_1 < \cdots < t_n \leq 1\}$ と2乗可積分な確率変数

$\{f_i(\omega),\ 1 \le i \le n\}$ ただし $f_i(\omega) \in \mathcal{F}_{t_i}$ があって，小区間 $[t_i, t_{i+1})$ ごとに $f(t,\omega)$ は次のように表される．

$$f(t,\omega) = f_i(\omega), \quad t \in [t_i, t_{i+1}),\ (0 \le i \le n-1) \tag{4.1}$$

このような乱関数の全体を S_2 で表すことにする．確率積分 $I(f) = \int_0^1 f(t,\omega)dW_t$ を次の手順で導入していく；まず $f \in S_2$ である場合に確率積分を定義し，これを f が $\mathbf{M}_2$ クラスである場合を経て最終的に $f \in \mathbf{M}$ である場合へと拡張していく．

<u>**第 1 段階：**</u> $f(t,\omega)$ が単純関数である場合．

定義 4.1 (1) $f \in S_2$ に対して $I(f)$ を次で与える；

$$I(f) = \int_0^1 f(t,\omega)dW_t = \sum_{k=1}^{n-1} f_k(\omega)\Delta_k W, \quad \Delta_k W = W(t_{k+1}) - W(t_k).$$

(2) $[0,t] \subset [0,1]$ 上の積分 $I_t(f) = \int_0^t f(s,\omega)dW_s$ は，単純関数 $f_t(s,\omega) = \mathbf{1}_{[0,t]}(s)f(s,\omega)$ の積分 $I(f_t)$ として定義する，すなわち；

$$I_t(f) = \sum_{k=1}^{K-1} f_k(\omega)\Delta_k W + f_K(\omega)(W_t - W_{t_K})$$

ただし K は $t_K \le t < t_{K+1}$.

単純な因果的関数 $f \in \mathbf{S}_2$ に対して定義された確率積分 $I(f)$ は次の性質を持つ．

命題 4.1 $f, g \in \mathbf{S}_2$ に対して次が成り立つ．

(a) $\mathbf{S}_2 \ni f \ \to I(f)$ は線形演算である．

$$I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g), \quad \alpha, \beta = 定数.$$

(b) $I_{s,t}(f) = I(\mathbf{1}_{[s,t]}f) = \displaystyle\int_s^t f(r,\omega)dW_r$ とすれば，$0 \le s \le t \le u \le 1$ に対して，$I_{s,u}(f) = I_{s,t}(f) + I_{t,u}(f)$ が成り立つ．

(c) $E[I(f)]=0$ であり，また $I(f)$ は $L^2([0,1]\times\Omega)$ から $L^2((\Omega,P))$ への等距離作用素である，すなわち；

$$E[|I(f)|^2]=E\int_0^1|f(t,\omega)|^2dt=||f||^2_{L^2([0,1]\times\Omega}$$

(d) 確率過程 $(t,\omega)\to I_t(f):=I_{0,t}(f)$ の見本関数は確率 1 で連続である．

$$P(\omega;[0,1]\ni t\to I_t(f)\ \text{は連続})=1$$

(e) $\{I_t(f)\}$ は $(\{\mathcal{F}_t\},P)$ に関してマルチンゲールである； $0\le s\le t\le 1$ に対して確率 1 で等式 $E[I_t(f)|\mathcal{F}_s]=I_s(f)$ が成り立つ．

証明　性質 (a) は定義から明らかである．(c) については，

$$\begin{aligned}E|I(f)|^2&=E\left[\sum_{k=1}^{n-1}f_k(\omega)\Delta_kW\right]^2\\&=E\left[\sum_{k=0}^{n-1}f_k^2(\omega)(\Delta_kW)^2+2\sum_{i>j}^{n-1}f_i(\omega)f_j(\omega)\Delta_iW\Delta_jW\right]\end{aligned}$$

において，等式

$$E[f_k^2(\omega)(\Delta_kW)^2]=E[f_k^2E\{(\Delta_KW)^2|\mathcal{F}_{t_k}\}]=E[f_k^2](t_{k+1}-t_k)$$

および

$$E[f_i(\omega)f_j(\omega)\Delta_iW\Delta_jW]=E[f_if_j\Delta_jWE[\Delta_iW|\mathcal{F}_{t_i}]]=0$$

と $f\in S_2$ であることに注意すれば，

$$E[I(f)^2]=\sum_{k=0}^{n-1}E[f_k^2](t_{k+1}-t_k)=E\int_0^1f^2(t,\omega)dt$$

を得る．

(d) はブラウン運動の連続性から明らか．(b) についても等式 $\mathbf{1}_{[s,u]}=\mathbf{1}_{[s,t]}+\mathbf{1}_{[t,u]}$ と積分 $I_{s,t}(f)$ の定義より明らかである．性質 (e) の証明をしておく．(b) より，$I_t(f)=I_s(f)+I_{s,t}(f)$ である．一方，任意の $t_j\ge s$ について tower property より

$$E[f_j^{(a)}\Delta_j W|\mathcal{F}s] = E[f_j^{(a)}E[\Delta_j w|\mathcal{F}_j]|\mathcal{F}s] = 0$$

であること，したがって $E[I_{s,t}(f)|\mathcal{F}s] = 0$ となるので，

$$E[I_t(f)|\mathcal{F}_s] = I_s(f) + E[I_{s,t}(f)|\mathcal{F}_s] = I_s(f)$$

となり結論に至る． □

前章でブラウン運動については， $Z_t = \exp\{\alpha W_t - (\alpha^2/2)t\}$ が $\{\mathcal{F}_t\}$-マルチンゲールになることを見たが，もう少し一般にして次の結果；

命題 4.2 $f \in \mathbf{S}_2$ について，

$$M_t = \exp\left\{\alpha I_t(f) - \frac{\alpha^2}{2}\int_0^t f(s,\omega)^2 ds\right\}$$

で与えられる M_t は $E[M_t] < \infty$ であればマルチンゲールである．

証明 実際，f を (4.1) で表される単純関数としたとき，$t_{i+1} \leq t \leq t_{i+2}$ であれば，

$$\int_0^t f^2(r)dr = \sum_{k=1}^{i} f_{t_k}^2(t_{k+1} - t_k) + f_{t_{i+1}}^2(t - t_{i+1})$$

と表されることにまず注意する．さらに，$t_i \leq s \leq t_{i+1} \leq t \leq t_{i+2}$ である任意の点 s, t について，

$$I_t(f) = I_s(f) + I_{s,t}(f) = I_s(f) + \{f_{t_i}(W_{t_{i+1}} - W_s) + f_{t_{i+1}}(W_t - W_{t_{i+1}})\}$$

であることにも注意する．一方，

$$\begin{aligned} E\left[\exp\{f_{t_{i+1}}(W_t - W_{t_{i+1}})\}|\mathcal{F}_s\right] &= E\left[E[\exp\{f_{t_{i+1}}(W_t - W_{t_{i+1}})\}|\mathcal{F}_{t_{i+1}}]|\mathcal{F}_s\right] \\ &= E\left[\exp\left\{\frac{f_{t_{i+1}}^2}{2}(t - t_{i+1})\right\}\middle|\mathcal{F}_s\right] \end{aligned}$$

であることより，次の等式が成り立つことがわかる．

$$E[M_t|\mathcal{F}_s] = E\left[\exp\left\{I_t(f) - \frac{1}{2}\int_0^t f^2(r)dr\right\}\middle|\mathcal{F}_s\right]$$

$$= M_s(f)E\left[\exp\left\{I_t(f) - I_s(f) - \frac{f_{t_i}^2}{2}(t_{i+1} - s) + \frac{f_{t_{i+1}}^2}{2}(t - t_{i+1})\right\}\middle|\mathcal{F}_s\right]$$

$$= M_s(f)E\left[\exp\left\{f_{t_i}(W_{t_{i+1}} - W_s) - \frac{f_{t_i}^2}{2}(t_{i+1} - s)\right\}\right.$$

$$\left.E\left[\exp\left\{f_{t_{i+1}}(W_t - W_{t_{i+1}}) - \frac{f_{t_{i+1}}^2}{2}(t - t_{i+1})\right\}\middle|\mathcal{F}_{t_{i+1}}\right]\middle|\mathcal{F}_s\right]$$

$$= M_s(f)\left[E\left[\exp\left\{f_{t_i}(W_{t_{i+1}} - W_s) - \frac{f_{t_i}^2}{2}(t_{i+1} - s)\right\}\middle|\mathcal{F}_s\right]\right]$$

$$= M_s(f) \quad (P - a.s.)$$

点 $s \leq t$ が分割 Δ の中でどのような位置にあろうと，上と同様の計算により結論の成立が確かめられる． □

<u>**第 2 段階；**</u> $f \in \mathbf{M}_2$ である場合への拡張．

次の結果が拠り所となるが証明は附録（9.9 参照）に回しておく．

命題 4.3 因果的単純関数の全体は $\mathbf{M}_2$ において稠密である．すなわち，任意の $f \in \mathbf{M}_2$ に対して，これに $L^2([0,T] \times \Omega)$ の意味で収束する単純関数列 $\{f_n\} \in \mathbf{S}_2$ が存在する；

$$\lim_{n\to\infty} ||f - f||_{L^2}^2 = \lim_{n\to\infty} E\int_0^T |f(t,\omega) - f_n(t,\omega)|^2 dt = 0$$

$f \in M_2$ とし $\{f_n\}$ を命題 4.3 にいうところの単純関数による近似列とする．確率積分 $I(f)$, $f \in \mathbf{S}_2$ の性質（命題 4.1 の (a),(c)）より，

$$\begin{aligned} E|I(f_n) - I(f_m)|^2 &= ||f_n - f_m||_{L^2}^2 \\ &\leq 2\{||f - f_n||_{L^2}^2 + ||f - f_m||_{L^2}^2\} \longrightarrow 0 \quad (m, n \to \infty) \end{aligned}$$

であり $\{I(f_n)\}$ は $L^2(\Omega, P)$ における基本列になっている．よって，極限 $\lim_{n\to\infty}$ $I(f_n)$ が存在し，さらに極限値が $\mathbf{S}_2$ における近似列 $\{f_n\}$ のとり方に関係しな

いことも容易にわかる．この極限値でもって $f \in M_2$ の確率積分 $I(f)$ と定義する．

定義 4.2 $f \in \mathbf{M}_2$ の確率積分は，

$$I(f) = \int_0^T f(t,\omega)dW_t := \lim_{n\to\infty} I(f_n), \quad L^2(\Omega) - \text{収束}$$

で与えられる．

定理 4.1 $f \in \mathbf{M}_2$ に対する確率積分 $I(f)$ は命題 4.1 に示す諸性質 (a) ~(e) を保有している．

証明 性質 (a),(b),(c) は明らかであろう．(d) と (e) のみを示す．

- (e) の検証；$f \in \mathbf{M}_2$ に対する近似列を $\{f_n\} \in \mathbf{S}_2$ とすれば，確率積分 $I_t(f)$ の定義より $\lim_{n\to 0} E|I_t(f) - I_t(f_n)|^2 = 0$ である．命題 4.1 の (e) より，各 n ごとに $\{I_t(f_n)\}$ はマルチンゲールであるから任意の $0 \le s \le t \le T$ において，$E[I_t(f_n) - I_s(f_n)|\mathcal{F}_s] = 0$ が成り立っている．したがって，

$$\begin{aligned} E[I_t(f) - I_s(f)|\mathcal{F}_s] &= E[I_t(f) - I_s(f)|\mathcal{F}_s] - E[I_t(f_n) - I_s(f_n)|\mathcal{F}_s] \\ &= E[I_t(f) - I_t(f_n)|\mathcal{F}_s] - (I_s(f) - I_s(f_n)) \end{aligned} \tag{4.2}$$

任意の $s \le t$ について，$E|E[I_t(f) - I_t(f_n)|\mathcal{F}_s]|^2 \le E|I_t(f) - I_t(f_n)|^2$ (cf. 補題 1.4 のイェンゼンの不等式）であるから上の等式 (4.2) より，

$$E|E[I_t(f) - I_s(f)|\mathcal{F}_s]|^2 = 0$$

すなわち，$E[I_t(f)|\mathcal{F}_s] = I_s(f)$ $(P - a.s.)$ であることを知る．

- (d) の検証；$f \in \mathbf{M}_2$ の近似列 $\{f_n\} \in \mathbf{S}_2$ から適当に部分列 $\{f_{n_i}\}$ を選び出して，

$$||f_{n_{i-1}} - f_{n_i}||^2_{L^2} = E\int_0^T |f_{n_{i-1}}(t,\omega) - f_{n_i}(t,\omega)|^2 dt \le \frac{1}{{n_i}^4}, \quad {}^\forall n_i$$

とできるから，一般性を失うことなく最初から上の条件が全ての n について成り立っているとしてよい．

$I_t(f_{n_1} - f_n)$ はマルチンゲールであったからマルチンゲール不等式（定理 3.7）と性質 (b) より，

$$P\left(\max_{0\le t\le T}|I_t(f_n) - I_t(f_{n-1})| \ge \frac{1}{n^{1.25}}\right) \le n^{2.5}E|I_T(f_n-f_{n-1})|^2 \le \frac{1}{n^{1.5}}$$

ところで，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1.5}} < \infty$ であるからボレル–カンテリの第 1 補題（命題 1.2）より，

$$P\left(\max_{0\le t\le T}|I_t(f_n) - I_t(f_{n-1})| < \frac{1}{n^{1.25}},\ {}^{\forall}n \ge^{\exists} N(\omega)\right) = 1$$

が成り立つ．また，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1.25}} < \infty$ であるので $m, n \longrightarrow \infty$ となるとき確率 1 で，

$$\max_{0\le t\le T}|I_t(f_n)-I_t(f_m)| \le \sum_{k=m+1}^{n}|I_t(f_k)-I_t(f_{k-1})| \le \sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k^{1.25}} \longrightarrow 0$$

すなわち列 $\{I_t(f_n)\}$ は確率 1 で $t \in [0,T]$ について $I_t(f)$ に一様に収束することがわかる．各 $I_t(f_n)$ は t について連続であったから極限 $I_t(f)$ も同様である． □

註 4.1 被積分関数 f が $f \in \mathbf{M}_2$ である場合，確率積分で定義される確率過程 $I_t(f)$ がマルチンゲールになるという性質 (e) は重要である．これにより確率積分は古典解析で扱う積分演算とは基本的に異なる性質を持つものであることが直ちにわかる．例えば，$f(t) = W_t$ であっても古典解析における結果と異なり，$I_t(f) = \int_0^t W_s dW_s = (1/2)W_t^2$ とはなっていないことは，左辺がマルチンゲールであるが右辺はそうではないことから容易に想像がつく．実際，$s < t$ である 2 点 s, t について，

$$\begin{aligned} E[W_t^2|\mathcal{F}_s] &= E[(W_t - W_s + W_s)^2|\mathcal{F}_s] \\ &= E[(W_t - W_s)^2 + 2(W_t - W_s)W_s + W_s^2|\mathcal{F}_s] \\ &= W_s^2 + (t-s) > W_s^2 \end{aligned}$$

命題 4.2 で示した性質も保存される．すなわち，

命題 4.4 $f \in \mathbf{M}_2$ について,

$$M_t = \exp\left\{\alpha I_t(f) - \frac{\alpha^2}{2}\int_0^t f(s,\omega)^2 ds\right\}$$

で与えられる M_t は $E[M_t] < \infty$ であればマルチンゲールである

証明は性質 (e) のそれと同様であるので省略する.

第 3 段階; $f \in \mathbf{M}$ である場合への拡張は次のようにして行われる.
$f \in \mathbf{M}$ に対して列 $\{f_m\}$ を

$$f_m(t,\omega) = \begin{cases} f(t,\omega) & (\int_0^t f^2(s,\omega)ds < m \text{ である場合}) \\ 0 & (\text{そうでない場合}) \end{cases}$$

で与えれば, 明らかに $\{f_m\} \in \mathbf{M}_2$ であり, $P\{\lim_{m\to\infty} f_m(t,\omega) = f(t,\omega)\} = 1$ である. さらに, $f_m \in \mathbf{M}_2$ であるから, 確率積分 $I(f_m)$ は定義済みであるが, 列 $\{I(f_m)\}$ は $m \to \infty$ で確率収束することが容易にわかる. 実際,

$$\int_0^T f(t,\omega)^2 dt < \min\{m,n\}$$

が成り立てば $f_m = f_n$. したがって $I(f_n) = I(f_m)$ でなければならないから, 任意の正数 ϵ に対して,

$$P(|I(f_n) - I(f_m)| > \epsilon) \le P\left(\int_0^T f(t,\omega)^2 dt \ge \min\{m,n\}\right)$$

であるが, 条件 $P\left(\int_0^T f^2(t,\omega)dt < \infty\right) = 1$ に注意して,

$$\lim_{m,n\to\infty} P(|I(f_n) - I(f_m)| > \epsilon) = 0$$

が従う. これより,

定義 4.3 $f \in \mathbf{M}$ に対しては, $I(f) := \lim_{n\to\infty} I(f_n)$ と定義する. また $t \in [0,T]$ に対して $\mathbf{1}_{[0,t]}(s)f(s,\omega) \in \mathbf{M}$ であるから, 積分 $I_t(f)$ を

$$I_t(f) := \int_0^t f(s,\omega)dW_s := I(\mathbf{1}_{[0,t]}(\cdot)f(\cdot))$$

で定義する．

このようにして $f \in \mathbf{M}$ まで拡張された確率積分 $I(f)$ は定理 4.1 で示した積分としての基本的性質 (a),(b),(c) を持つが，$I_t(f)$ はもはや $\mathbf{H}_2$ から $L^2(\Omega, P)$ への等距離作用素になっているとは限らないし，またマルチンゲールであるとも限らない．証明は省略するが性質の (d),(e) はそれぞれ次のように修正される；

命題 4.5 $f \in \mathbf{M}$ に対する積分 $I_t(f)$ は次の性質を持つ．

(d)′ $E[I(f)^2] \le E\{\int_0^T f^2(t,\omega)dt\}(\le \infty)$

(e)′ $I_t(f)$, $t \ge 0$ は次の意味で局所マルチンゲールである．

$$\tau_n(\omega) := \inf\left\{t; \int_0^t f^2(s,\omega)ds > n\right\}$$

とし，$M_t^n := I_{t\wedge\tau_n}(f)$ とおけば，各 $n \in \mathbf{N}$ ごとに $\{M_t^n, t \ge 0\}$ は $\{\mathcal{F}_t\}$-マルチンゲールである．

証明は適当な参考書（文献 7）参照）を見られたい．$f \in \mathbf{M}_2$ とすれば，$M_t = \int_0^t f(s,\omega)dW_s$ は第 3 章で挙げた定理 3.9（ドゥーブの不等式）の仮定を満たすマルチンゲールであり，$E[|M_T|^2] = E\left[\int_0^T |f(s)|^2 ds\right]$ であるから，同定理より直ちに次の結果が得られる；

系 4.1 確率積分で定義されるマルチンゲールは次の評価式を満たす．

$$E\left[\left(\sup_{0\le t\le T}\int_0^t f(s)dW_s\right)^2\right] \le 4E\int_0^T |f(s)|^2 ds$$

ここで見たように，伊藤積分の大きな特徴は，積分で作られる乱関数 $M_t = \int_0^t f(s)\, dW_s$ がブラウン運動の情報についての自然な篩に関して（局所）マルチンゲールになっていることである．実はある意味でこの逆も成り立つ．以後，

マルチンゲール M_t が各 t ごとに条件, $E[|M_t|^2] < \infty$ を満たすとき 2 乗可積分であるということにする.

定理 4.2（マルチンゲールの積分表現定理） $\{\mathcal{F}_t\}$ をブラウン運動 W_t が生成する自然な篩とする. M_t が $\{\mathcal{F}_t\}$-マルチンゲールでさらに 2 乗可積分ならば, 可予測な乱関数 f が存在して, $M_t = M_0 + \int_0^t f(s)dW_s$ と表される.

このとき M_t の 2 次変動量（後出）は, $[M]_t = \int_0^t f^2(s)\,ds$ である. したがって, $[M]_t = t$ ならば $f(t) = 1$. 言いかえれば, ブラウン運動の生成する自然な篩に関するマルチンゲールで $[M]_t = t$ であれば, M_t はブラウン運動であることがわかる.

註 4.2 これと関連の事柄としてマルチンゲールの時間変更について証明なしに説明しておく（例えば文献 7）など）.

$f \in \mathbf{M}_2$ とし, $X_t = \int_0^t f(s)dW_s$ とする. $\tau(t) := \int_0^t f^2(r)dr$ をマルチンゲール X_t の固有時間という. $\tau(t)$ は t について単調増大である. 簡単のために $\lim_{t\to\infty} \tau(t) = \infty(P-a.s.)$ としておく. このとき,

$$Y_t := X(\tau^{-1}(t)),\quad \tau^{-1}(t) := \min\{s : \tau(s) \le t\}$$

とおけば, Y_t はブラウン運動に戻る.

4.2 補　　足

応用上の便宜を考慮して確率積分に関するこれまでの議論の補足や一般化についてまとめておく. 軽くながめて, 後で必要に応じて参照されればよろしい.

4.2.1 積分区間が $[0,\infty)$ である場合

因果的で条件, $P\left(\int_0^\infty f^2(t,\omega)dt < \infty\right) = 1$ を満たす乱関数全体を今までと同じ記号を使って $\mathbf{M}$ と表すことにし, $f \in \mathbf{M}$ について, 無限区間における積分 $\int_0^\infty f(t,\omega)dW_t$ を導入することを考える.

(1) まず f がさらに強い条件，$E[\int_0^\infty f(t,\omega)^2 dt] < \infty$，を満たす場合を考える．このような因果的乱関数の全体を再び記号 $\mathbf{M}_2$ で表すことにする．自然数 $n \in \mathbf{N}$ ごとに $f_n(t,\omega) = \mathbf{1}_{[0,n]}(t) f(t,\omega)$ とおけば，$\{f_n\}$ は f に対する $\mathbf{M}_2$ 近似列となっており，$I(f_n) = \int_0^n f(t,\omega) dW_t$ であるから，

$$\lim_{m,n\to\infty} E|I(f_n) - I(f_m)|^2 = \lim_{m,n\to\infty} E\int_m^n f^2(t,\omega)dt = 0$$

である．よって 2 乗平均の意味で極限 $\lim_{n\to\infty} I(f_n)$ が存在するので，それを $I(f) = \int_0^\infty f(t,\omega)dW_t$ と定義する．この作り方より，等式 $E[I(f)^2] = E\int_0^\infty f^2(t,\omega)dt$ が成り立つことに注意しておく．

(2) ついで，$f \in \mathbf{M}$ に対して，

$$f_n(t,\omega) = \begin{cases} f(t,\omega) & (\text{ただし} \displaystyle\int_0^t f^2(s,\omega)ds \le n) \\ 0 & (\text{それ以外の場合}) \end{cases}$$

とおけば，$f_n \in \mathbf{M}_2$ であり，先に行ったと同様の議論で列 $\{I(f_n)\}$ は $n \to \infty$ となるとき，確率収束することがわかる．その極限でもって $I(f)$ と定義する．すなわち，

$$I(f) = \int_0^\infty f(t,\omega)dW_t := \lim_{n\to\infty} I(f_n)$$

(3) 確率積分，$f \in \mathbf{M} \longrightarrow I(f) = \int_0^\infty f dW_t$ は線形演算である．すなわち，定数 α, β と $f, g \in \mathbf{M}$ に対して，$I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g)$ が成り立つ．また，$0 \le s \le t \le u < \infty$ について，等式

$$\int_s^u f(r,\omega)dW_r = \int_s^t f(r,\omega)dW_r + \int_t^u f(r,\omega)dW_r$$

も成り立つ．

(4) 注意：$f \in \mathbf{M}_2$ であれば $I_t(f)$ は $\mathcal{F}_t$-マルチンゲールになる．

4.2.2 補足——リーマン（Riemann）積分としての確率積分

再び有限区間 $[0,T]$ 上の確率積分の議論に戻り，その作り方について再考してみたい．被積分関数 f が以下に述べるような平均連続性を有するとき，積

分 $I(f) = \int_0^T f(t,\omega)dW_t$ が具体的な手順で求められることを示すのが目的である．

乱関数 $f(t,\omega)$ は次の条件を満たすとき **（2 乗）平均の意味で連続である**（あるいは，簡単に **M^2-連続である**）という； 任意の $t \in (0,T)$ において，

$$\lim_{h\to 0} E|f(t+h) - f(t)|^2 = 0.$$

$\mathbf{M}_2$ 級の因果的乱関数で M^2-連続であるものの全体を $\mathbf{M}_2^C$ と表すことにする．$f(t,\omega)$ を $\mathbf{M}_2^C$ 級の乱関数とし，$\Delta_n = \{0 \le t_1^n < \cdots < t_n^n \le T\}$ $(n \in \mathbf{N})$ を $\lim_{n\to\infty} |\Delta_n| = 0$ である分割列とする．ただし，$|\Delta_n| = \max_i |t_{i+1}^n - t_i^n|$ である．分割列に対応して関数列 $\{f_n\}$ を

$$f_n(t,\omega) = f(\eta_n(t),\omega)$$

で構成する，ここに $\eta_n(t)$ は $t \in [t_i^n, t_{i+1}^n)$ であれば，$\eta_n(t) = t_i^n$ で定まる関数とする．このとき $\{f_n\}$ は f に対する S_2 級の近似列になっていることに注意する．実際，各 $f_n(t,\omega)$ が因果的であることは明らかであり，また f の平均連続性より，各 $t \in [0,T]$ ごとに $\lim_{n\to\infty} E|f(t,\omega) - f_n(t,\omega)|^2 = 0$ が従うので，積分の有界収束定理より，

$$\lim_{n\to\infty} E\int_0^T |f(t,\omega) - f_n(t,\omega)|^2 dt = 0$$

であることがわかる．したがって，この関数列 $\{f_n\}$ を確率積分 $I(f)$ の定義における S_2-近似列として採用することができて，次の表現が得られる；

$$I(f) := \lim_{n\to\infty} I(f_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} f(t_i^n,\omega)\{W(t_{i+1}^n) - W(t_i^n)\}$$

これは確率積分がリーマン型の積分である（すなわち，リーマン和の極限としてとらえられる）ことを意味している．

註 4.3 ただし，ここでの極限 $\lim_{n\to\infty}$ は 2 乗平均収束の意味でとられている．このことを応用系の書物では，l.i.m.（すなわち，“limit in the mean”）という記号を使って，

$$I(f) := \mathrm{l.i.m.}_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} f(t_i^n,\omega)\{W(t_{i+1}^n)-W(t_i^n)\}$$

と表すことがある.

例 4.1 積分 $I_t(W)=\int_0^t W_r dW_r$ を求めている. $\Delta_n=\{0\le t_1^n<\cdots<t_n^n\le t\}$ を $\lim_{n\to\infty}|\Delta_n|=0$ となる分割列とすれば, 上の議論より

$$I_t(W)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}W(t_i^n)\Delta_{n,i}W,\quad \Delta_{n,i}=W(t_{i+1}^n)-W(t_i^n),\ t_i^n\in\Delta_n$$

である. これを書き直せば,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1}W(t_i)\Delta_{n,i}W &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1}\left\{\frac{W(t_i^n)+W(t_{i+1}^n)}{2}-\frac{\Delta_{n,i}W}{2}\right\}\Delta_{n,i}W\\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n-1}\left\{\frac{W^2(t_{i+1}^n)-W^2(t_i^n)}{2}\right\}-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{(\Delta_{n,i}W)^2}{2}\right]\\ &= \frac{W_t^2}{2}-\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{(\Delta_{n,i}W)^2}{2}\end{aligned}$$

となるが, 容易にわかるように, 第 2 項の極限は 2 乗平均の意味で $t/2$ 収束する (確かめてみよ). よって, 次の結果を得る.

$$I_t(W)=\frac{W_t^2}{2}-\frac{t}{2}$$

例 4.2 最も簡単な単純関数 $f(t,\omega)=W_1(\omega)$ を考えてみる. この場合に当然予想される結果,

$$\int_0^1 W_1(\omega)dW_t = W_1^2 \qquad ?$$

は成り立たない. なぜなら $f(t)=W(1,\omega)$ は単純関数であるが因果的ではなく ($f\notin S_2$), したがって伊藤積分の対象からははずされているからである. リーマン和の極限としては成立しているにもかかわらずである. 奇妙ではあるが仕方がない. 伊藤型積分はブラウン運動というマルチンゲールを別の連続なマル

チンゲールに変換するものであり，このゆえに確率解析の基礎素材として実によくできた概念であるが，後出の有名な伊藤公式に見られる特異さとともに，些細ではあるがこうした不自然さも内在したものである．筆者が導入した**非因果的確率積分**[25]（後述）では，このような現象は現れない．

4.3 伊 藤 公 式

$\mathbf{M}$ 級の乱関数 $a(t,\omega), b(t,\omega)$ を使って，

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s,\omega)ds + \int_0^t b(s,\omega)dW_s \tag{4.3}$$

と表せる乱関数 X_t は伊藤過程とよばれることがある．この関係式は往々にして形式的に次のような微分形式，

$$dX_t = a(t,\omega)dt + b(t,\omega)dW_t \tag{4.4}$$

で表すのが通例である．すなわち，表現式 (4.12) は単に略式の記号であり，本当の意味は関係式 (4.11) で与えられている．

滑らかな実数値関数 $f(t,x)$, $(t,x) \in [0,T] \times \mathbf{R}^1$ と伊藤過程 X_t によって，$Y_t = f(t,X_t)$ と表される新しい確率過程 Y_t の $\{W_s, s \leq t\}$ への依存具合について調べてみたい．

区間 $[0,T]$ 内の 2 点 $0 = t_0 < t$ をとり，差 $f(t,X(t)) - f(t_0,X(t_0))$ の表し方を考えてみる．点 t を分点として含む分割を $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t\}$ とすれば，

$$f(t,X(t)) - f(t_0,X(t_0)) = \sum_{i=1}^{n} \{f(t_i,X(t_i)) - f(t_{i-1},X(t_{i-1})\} \tag{4.5}$$

である．左辺は分割 Δ とは無関係である．右辺において，分点数 n をどんどん大きくとって $|\Delta| = \max_k |t_k - t_{k-1}| \to 0$ とした極限を考えてみる．そのために，教養課程の微積分学で学習したテイラー (Taylor) の定理（附録の 9.5 を参照）を思い起こそう．2 変数関数 $f(t,x)$, $(t,x) \in \mathbf{R}^2$ が (t',x') の近くで

十分に滑らかであれば（n 階連続的微分可能であれば），変数 (t,x) の微少変位 (h,k) に対しては適当な定数 $0<\theta<1$ が存在して次の等式が成り立つ；

$$f(t'+h,x'+k)=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{j!}\left\{\left(h\frac{\partial}{\partial t}+k\frac{\partial}{\partial x}\right)^j f\right\}(t',x')$$
$$+\frac{1}{n!}\left\{\left(h\frac{\partial}{\partial t}+k\frac{\partial}{\partial x}\right)^n f\right\}(t'+\theta h,x'+\theta k) \qquad (4.6)$$

ここで $t_{i-1}<t_i$ をとり，$t'=t_{i-1}$，$h=\Delta_i t=t_i-t_{i-1}$，$x'=X(t_{i-1}),k=\Delta_i X=X(t_i)-X(t_{i-1})$ とおいて上式 (4.6) に代入し，微少変位 $\Delta_i t,\Delta_i X$ について整理すれば次の式を得る；

$$\begin{aligned}&f(t_i,X(t_i))-f(t_{i-1},X(t_{i-1}))\\&\quad=f_t(t_{i-1},X(t_{i-1}))\Delta_i t+f_x(t_{i-1},X(t_{i-1}))\Delta_i X\\&\qquad+\frac{1}{2}f_{xx}(t_{i-1},X(t_{i-1}))(\Delta_i X)^2+O((\Delta_i t)^2)+O((\Delta_i X)^3)\end{aligned} \qquad (4.7)$$

ここに，

$$f_t=\frac{\partial}{\partial t}f,\quad f_x=\frac{\partial}{\partial x}f,\quad f_{xx}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 f$$

である．

X_t の定義式より，

$$\begin{aligned}\Delta_i X&=\int_{t_{i-1}}^{t_i}a(s,\omega)ds+\int_{t_{i-1}}^{t_i}b(s,\omega)dW_s\\&=a(t_{i-1},\omega)\Delta_i t+b(t_{i-1},\omega)\Delta_i W+O((\Delta_i t)^{3/2})\end{aligned}$$

であることに注意して等式 (4.7) をさらに整理すれば，

$$\begin{aligned}&f(t_i,X(t_i))-f(t_{i-1},X(t_{i-1}))\\&\quad=(f_t(t_{i-1},X(t_{i-1}))+a(t_{i-1})f_x(t_{i-1},X(t_{i-1}))\\&\qquad+\frac{1}{2}b^2(t_{i-1})f_{xx}(t_{i-1},X(t_{i-1}))\}\Delta_i t+b(t_{i-1})f_x(t_{i-1},X(t_{i-1}))\Delta_i W\\&\qquad+O((\Delta_i t)^{3/2})+O((\Delta_i X)^3)\end{aligned}$$

これを最初の等式 (4.5) に代入して次の等式を得る．

$$
\begin{aligned}
&f(t, X(t)) - f(t_0, X(t_0)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Big[\Big\{ f_t(t_{i-1}, X(t_{i-1})) + a(t_{i-1}) f_x(t_{i-1}, X(t_{i-1})) \\
&\quad + \frac{1}{2} b^2(t_{i-1}) f_{xx}(t_{i-1}, X(t_{i-1})) \Big\} \Delta_i t + b(t_{i-1}) f_x(t_{i-1}, X(t_{i-1})) \Delta_i W \\
&\quad + O((\Delta_i t)^{3/2}) + O((\Delta_i W)^3) \Big]
\end{aligned}
$$

ここで $|\Delta| \to 0$ とすれば平均の意味で，

$$
\sum_{i=1}^{n} [O((\Delta_i t)^{3/2}) + O((\Delta_i W)^3)] \longrightarrow 0
$$

であるから，積分および確率積分の定義より次の等式に至る．

$$
\begin{aligned}
&f(t, X(t)) - f(t_0, X(t_0)) \\
&= \int_0^t \Big\{ f_t(s, X(s)) + a(s) f_x(s, X(s)) + \frac{1}{2} b^2(s) f_{xx}(s, X(s)) \Big\} ds \\
&\quad + \int_0^t b(s) f_x(s, X(s)) dW_s
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

これは**伊藤公式**（Itô formula）といい，確率解析における基本的役割を果たす等式である．微分形式の形で書けば，

$$
df(X_t) = \Big\{ f_t(t, X_t) + a(t) f_x(t, X_t) + \frac{b^2}{2} f_{xx}(t, X_t) \Big\} dt + b(t) f_x(t, X_t) dW_t
$$

となる．

例 4.3 $g(x)$ を滑らかな関数とする．$X_t = g(W_t)$ に定理を適用すれば次式が得られる．

$$
g(W_t) - g(W_s) = \int_s^t g'(W_r) dW_r + \frac{1}{2} \int_s^t g''(W_r) dr
$$

$s = 0 < t,\ g(x) = \exp\{\alpha x\}$ ととれば，

$$
\exp\{\alpha W_t\} = 1 + \alpha \int_0^t \exp\{\alpha W_s\} dW_s + \frac{\alpha^2}{2} \int_0^t \exp\{\alpha W_s\} ds
$$

したがって，$Z_t(\alpha)=\exp\{\alpha W_t-\frac{\alpha^2}{2}t\}$ とおけば，

$$dZ_t(\alpha)=\alpha Z_t(\alpha)dW_t$$

が成り立つ．$E\{Z_t(\alpha)\}=1<\infty$ であるから，$Z_t(\alpha)$ は $\mathcal{F}_t$-マルチンゲールであることがわかる．

数理ファイナンスへの応用に限らず，確率解析の数理科学諸分野への応用に際しては多次元化した伊藤公式が必要となる．そのための準備として次のようなことを考える．$\mathbf{W}(t)={}^t(W_1(t),W_2(t),\cdots,W_m(t))$ を m 次元ブラウン運動（すなわち，$\{W_i(t),\ 1\le i\le m\}$ は m 個の独立なブラウン運動）とし，$\{\mathcal{F}_t\}$ はこの d 次元ブラウン運動で生成される σ-集合体の族とし，$f(t,\omega)$ はこの族に関して因果的な $\mathbf{M}_2$ 級の乱関数とする．

補題 4.1 区間 $[0,T]$ の細分割列 $\{\Delta_n\}$，$\Delta_n=\{0\le t_0^n<t_1^n<\cdots<t_n^n\le T\}$ $(|\Delta_n|=\max_i|t_{i+1}^n-t_i^n|\longrightarrow 0)$ が与えられたとき，次の関係式が平均収束の意味で成り立つ．

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum f(t_k^n)(\Delta_k W^i)^2=\lim_{n\to\infty}\sum f(t_k^n)\Delta_{n,k}t=\int_0^T f(s)dt$

(b) $i\ne j$ であれば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum f(t_i^n)\Delta_{n,k}W^i\Delta_{n,k}W^j=0$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum f(t_i^n)\Delta_{n,k}W^i\Delta_{n,k}t=0$

(d) $\alpha,\beta\ge 0,\ \alpha+\beta\ge 3$ であれば，
$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum f(t_i^n)(\Delta_{n,k}W^i)^\alpha(\Delta_{n,k}W^j)^\beta=0$

上において，$\Delta_{n,k}t=t_{k+1}^n-t_k^n$，$\Delta_{n,k}W=W(t_{k+1}^n)-W(t_k^n)$ である．

以下に多次元の伊藤過程に対する伊藤公式を証明抜きで定理としてまとめておくことにする．

定理 4.3（伊藤公式） $\mathbf{W}(t)={}^t(W_1(t),W_2(t),\cdots,W_m(t))$ を m 次元ブラウン運動（すなわち，$\{W_i(t),\ 1\le i\le m\}$ は m 個の独立なブラウン運動）とし，$\mathbf{X}(t)={}^t(X_1(t),X_2(t),\cdots,X_d(t))$ は各成分が次で定められる d 次元伊藤過程

とする．

$$X_i(t) = X_i(0) + \int_0^t a_i(s,\omega)ds + \sum_{k=1}^m \int_0^t b_i^k(s,\omega)dW_k(s)$$

ここに，$\{a_i, 1 \le i \le d\}$，$\{b_i^j,\ 1 \le i \le d, 1 \le j \le m\}$ は全て $\mathbf{M}$ 級の乱関数である．

$f(t, x_1, x_2, \cdots, x_d)$，$(t, x_1, x_2, \cdots, x_d) \in [0,T] \times \mathbf{R}^d$ を十分に滑らかな（C^3 級）関数とするとき，合成関数 $f(t, \mathbf{X}(t))$ は次の等式を満たす；

$$\begin{aligned} f(t,\mathbf{X}(t)) &= f(t_0, \mathbf{X}(t_0)) \\ &\quad + \int_{t_0}^t \left\{ f_t + \sum_{i=1}^d a_i f_{x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^d \sum_{j_1,j_2=1}^m b_i^{j_1} b_i^{j_2} f_{x_{j_1}, x_{j_2}} \right\}(s, \mathbf{X}(s))ds \\ &\quad + \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^m b_i^j f_{x_i}(s, \mathbf{X}(s))dW_j(s) \end{aligned} \tag{4.9}$$

形式的に微分形式で表せば;

$$df(t,\mathbf{X}(t)) = \left\{ f_t + \boldsymbol{a}\nabla f + \frac{1}{2}(\boldsymbol{b}\nabla, \boldsymbol{b}\nabla)f \right\}(t, \mathbf{X}(t))dt + (\boldsymbol{b}\nabla f)(t, \mathbf{X}(t))d\mathbf{W}(t) \tag{4.10}$$

ただし，$\boldsymbol{a} = {}^t(a_1, a_2, \cdots, a_d) \in \mathbf{R}^d$，また $\boldsymbol{b} = \{b_i^j,\ 1 \le i \le d,\ 1 \le j \le m\}$ は $d \times m$ 行列，$\nabla f = {}^t(\partial_{x_1} f, \partial_{x_2} f, \cdots, \partial_{x_d} f)$ である．

ちょっと乱暴であるが，手軽に伊藤公式を導く手順を便法風に説明しておこう．まず土台の関数 $F(x_1, X_2, \cdot, x_d)$ のテイラー展開式を求め，それから次の操作を施して行けばよい：

(1) 展開式を変数の 2 次の変分 $(\Delta X^i)^p (\Delta X^j)^q$ $(p+q \le 2)$ までをとり，

(2) 各変数の変分 $\Delta X_t^i = X^i(t+\Delta t) - X^i(t)$ を $dX^i = a^i dt + \sum_j b_j^i dW^j$ で置きかえ，

(3) 展開式に規則，

$(dW^i)(dW^j) = \delta_{i,j}dt$，$(dW^i)^p(dW^j)^q = 0 \quad (p+q \ge 3)$，

$(dW^i)^p dt = 0 \quad (p \ge 1)$

を適用して整理すればよい．

例えば,

例 4.4 (1) $X_t^1 = \int_0^t f dW_s,\ X_t^2 = \int_0^t g(s,\omega) dW_s$
および $F(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$ として, $Y_t = F(X_t^1, X_t^2)$ に公式を当てはめれば,

$$dF = \{f(t,\omega)X_t^2 + X_t^1 g(t,\omega)\}dW_t + f \cdot g dt$$

よって, $F(X_0^1, X_0^2) = 0$ に注意して,

$$\begin{aligned}
&\int_0^t f(s,\omega)dW_s \int_0^t g(s,\omega)dW_s \\
&\quad = \int_0^t f(t,\omega)dW_s \int_0^s g(r,\omega)dW_r + \int_0^t g(s,\omega)dW_s \int_0^s f(r,\omega)dW_r \\
&\qquad + \int_0^t f(s,\omega)g(s,\omega)ds
\end{aligned}$$

を得る.

(2) 上の例で少し状況を変えて, $dX_t^1 = f(t,\omega)dW_t^1$, $dX_t^2 = g(t,\omega)dW_t^2$, ($W^1, W^2$ は独立なブラウン運動) であるとき, $Y_t = F(X_t^1, X_t^2)$ に伊藤公式を当てはめれば次の等式を得る.

$$\begin{aligned}
&\int_0^t f(s,\omega)dW_s^1 \int_0^t g(s,\omega)dW_s^2 \\
&= \int_0^t f(s,\omega)dW_s^1 \int_0^s g(r,\omega)dW_r^2 + \int_0^t g(s,\omega)dW_s^2 \int_0^s f(r,\omega)dW_r^1
\end{aligned}$$

特に $f = g = 1$ の場合を考えれば次の等式になる.

$$W_t^1 W_t^2 = \int_0^t W_s^1 dW_s^2 + \int_0^t W_s^2 dW_s^1$$

4.4 対 称 積 分

伊藤清により導入された確率積分と通常のリーマン積分との違いは, 与えられた分割 $\Delta = \{0 \le t_1 < \cdots < t_n \le T\}$ の各部分区間 $J_k = [t_k, t_{k+1})$ における被積分関数 f の代表点のとり方が, 通常のリーマン積分では任意 $(f(\xi_k), \xi \in J_k)$

であったのに対して，確率積分においてはその区間 J_k の「左端点 t_k における関数値 $f(t_k,\omega)$」として固定されていることである．このことが，被積分関数が因果的であるという大前提と共に伊藤積分の本質的な特徴となっている．これと異なった方式での確率積分導入の可能性について考えることは単に好奇心を刺激するばかりでなく，応用上重要な話題でもある．本格的な議論は後の章に回すとして，ここではちょっとした変形について考えることにする．後々の議論のために確率過程の名称を 2，3 導入しておこう．まず，**M** 級の乱関数 $a(t,\omega), b(t,\omega)$ を使って，

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s,\omega)ds + \int_0^t b(s,\omega)dW_s \tag{4.11}$$

と表せる乱関数（あるいは確率過程）X_t は伊藤過程とよばれること，またこの関係式は往々にして次のような形式的な微分形式，

$$dX_t = a(t,\omega)dt + b(t,\omega)dW_t \tag{4.12}$$

で表されることは既に紹介した．一般にマルチンゲール M_t と確率 1 で有界変動な乱関数 A_t によって，$X_t = M_t + A_t$ の形で表される確率過程 X_t は**セミマルチンゲール** (semi-martingale)，あるいは**半マルチンゲール**とよばれる．伊藤過程はセミマルチンゲールの具体例である．これに対して，A_t が平均連続性 $\sup_t E|A_{t+h} - A_t|^2 = o(h)$ を満たす（必ずしも因果的ではない）乱関数であるような X_t もこれからの議論には現れる．適当な名称が見当たらないのであるが，本書では**擬マルチンゲール**（pseudo martingale）とでもよぶことにしておく．擬マルチンゲールはセミ・マルチンゲールとは限らないが，A_t が因果的で密度を持つ場合（すなわち，$A_t = \int^t a_s\, ds$）擬マルチンゲール X_t はセミマルチンゲールでもある．

4.4.1 対称積分 — 伊藤過程に対する積分

$dX_t = a(t)dt + b(t)dW_t$，$(a(\cdot), b(\cdot) \in \mathbf{M}_2)$ で表される伊藤過程 X_t と区間 $[0,T]$ の正則な分割列

$$\{\Delta^{(n)}\},\ \Delta^{(n)} = \{0 \le t_0^n < \cdots < t_n^n \le T\}\ \ (\lim_{n\to\infty} |\Delta^{(n)}| = 0)$$

が与えられたとき，定数 $0 \le \theta \le 1$ に対して，次のようなリーマン和を考える．

$$S_n(X:\theta) = \sum_{k=0}^{n-1} \{X(t_k^n) + \theta \Delta_k X\} \Delta_k W \tag{4.13}$$

ここに，$\Delta_k X$ は $[t_k^n, t_{k+1}^n)$ における X の増分，$\Delta_k X = X(t_{k+1}^n) - X(t_k^n)$ である．

極限 $\lim_{n\to\infty} S_n(X:\theta)$ が存在することは容易にわかる．実際，

$$A(t) = A(0) + \int_0^t a(s)ds,\ B(t) = B(0) + \int_0^t b(s)dW_s$$

とおけば，$\Delta_k X = \Delta_k A + \Delta_k B$ であるから，

$$S_n(X:\theta) - S_n(X:0) = \theta \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k X \Delta_k W = \theta \sum_{k=0}^{n-1} \{\Delta_k A + \Delta_k B\} \Delta_k W$$

となるが第 1 項については，$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k A \Delta_k W = 0$ である．第 2 項については伊藤公式より，

$$\begin{aligned}
\Delta_k B \Delta_k W &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} b(s)dW_s \int_{t_k}^{t_{k+1}} dW_s \\
&= \int_{t_k}^{t_{k+1}} b(s)ds + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \{(B(s) - B(t_k)) + b(s)(W(s) - W(t_k))\} dW_s
\end{aligned}$$

これより，

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k B \Delta_k W = \int_0^T b(s)ds$$

が従う．一方，

$$\lim_{n\to\infty} S_n(X:0) = \int_0^T X(s)dW_s$$

であったから，結局 $\lim_n S_n(X:\theta)$ も収束して次の関係式を満たすことがわかる．

$$\lim_{n\to\infty} S_n(X:\theta) = \int_0^T X(s)dW_s + \theta \int_0^T b(s)ds \tag{4.14}$$

言うまでもなく，第 1 項目は X の伊藤積分である．この極限は $\mathcal{I}_\theta(X)$ あるいは $\int_0^T X(s)d_\theta W_s$ と表され，X の θ 型確率積分とよばれる [22,25]．特に $\theta = 1/2$

の場合，$\mathcal{I}_{1/2}(X)$ は X の**対称積分**，あるいは ストラトノヴィッチ–フィスク (Stratonovich-Fisk) 積分，ともよばれる．対称積分を用いれば伊藤公式は次のように微積分で親しんだ形に表される．

定理 4.4 X_t を $dX_t = a(t,\omega)dt + b(t,\omega)dW_t$, $(a(\cdot), b(\cdot) \in \mathbf{M}_2$ で表される伊藤過程とする．$F(t,x)$ を滑らか（C^2 級な）関数とするとき，次の等式が成り立つ；

$$
\begin{aligned}
dF(t,X_t) &= F'_t(t,X_t)dt + F'_x(t,X_t)d_{1/2}X_t \\
&= F'_t(t,X_t)dt + \{aF'_x dt + bF'_x d_{1/2}W_t\}
\end{aligned}
$$

ただし，$\int \cdot d_{1/2}W_s$ は対称積分を表している．

4.4.2 対称積分 2——B-微分可能関数の場合

前項で紹介した対称積分は伊藤過程を被積分関数の対象としたものであった．具体的に伊藤過程しか扱わない場面ではこれでも十分であるが，議論そのものはもう少し一般的な設定の下で展開することが可能であり，その見返りとしてさらに一般的な結果を得ることができる．応用的場面における重要性を考慮してそのことを少し説明しておこう．

$\mathbf{M}_2$ 級の乱関数 f と，区間 $[0,T]$ の分割列 $\Delta_n = \{0 \le t_0^n < t_1^n < \cdots < t^n \le T\}$ で $|\Delta_n| \longrightarrow 0\ (n \to \infty)$ となるものが与えられているとして，次で与えられるリーマン和 T_n の収束性を調べてみる；

$$
T_n(f:\theta) := \sum_{i=1}^{n-1} f(t_i^n + \theta\Delta_i)\Delta_i W
$$

ただし，θ は $0 \le \theta \le 1$ なる定数で，$\Delta_i W = W(t_{i+1}^n) - W(t_i^n)$, $\Delta_i = t_{i+1}^n - t_i^n$ である．

4.4.1 項で扱ったリーマン和 $S_n(f:\theta)$ との違いは，小区間 $J_i = [t_i^n, t_{i+1}^n)$ における関数 f の代表値としてこの区間の θ 内分点における値 $f(t_i^n + \theta\Delta_i)$ を採

用している点である．今の場合，この列 T_n の収束性について議論するには乱関数 f のブラウン運動 W_t に関する微分（以後簡単に B-微分とよぶ）$\frac{\partial}{\partial W_t} f(t,\omega)$ という概念が必要になる．積分を考えるために微分が必要というのも一見奇異に思えるであろうが，もともとが有界変動でない関数による積分を考えるという，古典解析の常識から見れば無茶な話を進めているわけでありこの程度の投資は覚悟しなければならない．まさに確率解析の特異性の現れにほかならないといえよう．

定義 4.4（B-微分） $\mathbf{M}_2$ 級の関数 f に対して，次の性質を持つ $\hat{f} \in \mathbf{M}_2$ が存在するとき f は L^{2p} の意味でブラウン運動に関して微分可能である，あるいは簡単に $B(p)$-微分可能であるという．

$$\sup_{0\le t\le T-h} E\left| f(t+h) - f(t) - \int_t^{t+h} \hat{f}(s,\omega)dW_s \right|^{2p} = o(h^p)$$

$\hat{f}$ を f の B-導関数とよび，$\hat{f} = \frac{\partial}{\partial W_t} f$ とも記す．L^2 の意味で微分可能であるときは単に B-微分可能であるという．

B-微分については次のことが成り立つ．証明なしに記しておく[25,34]．

命題 4.6（S.Ogawa[22),23)]） B-導関数，B-微分演算は次の性質を持つ．

(b1) B-微分可能ならば B-導関数 $\hat{f}$ は一意的に定まる．

(b2) B-微分は線形演算である．

(b3) B(2p)-微分可能ならば B(2q)-微分可能（ただし，$q < p$）であって，B-導関数は同じである．

(b4) f, g が L^4 の意味で B-微分可能ならば，fg は B-微分可能で次の関係式が成り立つ；

$$\frac{\partial}{\partial W_t}(f \cdot g) = \hat{f}g + f\hat{g}.$$

次の例は記号 $\partial/\partial W_t$ の根拠を説明している．

例 4.5 $\mathbf{M}_2$ 級の伊藤過程 f は B-微分可能であって，$df = a(t,\omega)dt + b(t,\omega)dW_t$ であれば $\hat{f} = b(t,\omega)$ が成り立つ．

対称積分の議論に戻る．分割列 $\Delta_n = \{0 \leq t_0^n < t_1^n < \cdots < t_n^n \leq T\}$ が与えられたとして，先に挙げた B-微分可能な乱関数 f に対するリーマン和 $S_n(f:\theta)$ を考え，これを伊藤積分の近似列になるリーマン和，今の記号で書けば，$T_n(f:0) = \sum_{i=1}^{n-1} f(t_k^n)\Delta_i W$ と比較してみる．

$$T_n(f:\theta) = T_n(f:0) + \sum_{i=1}^{n-1}\{f(t_i^n + \theta\Delta_i) - f(t_i^n)\}\Delta_i W, \quad \Delta_i = t_{i+1}^n - t_i^n$$

右辺第 1 項目については伊藤積分の定義より，

$$\lim_{n\to\infty} T_n(f:0) = \int_0^T f(s)dW_s$$

であるが，第 2 項目については f の B-微分可能性より，

$$f(t_i^n + \theta\Delta_i) - f(t_i^n) = \int_{t_i^n}^{t_i^n + \theta\Delta_i} \hat{f}(s)dW_s + o(\sqrt{\Delta_i})$$

であるので簡単な計算により次のことがわかる．

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1}\{f(t_i^n + \theta\Delta_i) - f(t_i^n)\}\Delta_i W = \theta\int_0^T \hat{f}(s)ds \qquad \text{(確率収束)}$$

これらより次の結果が得られる．

定理 4.5 B-微分可能な因果的 f に対してリーマン和 $T_n(f:\theta)$ は $n \to \infty$ で確率収束し極限，$\int_0^T f(s)d_\theta W_s$ と記すことにする，は次の等式を満たす；

$$\int_0^T f(s)d_\theta W_s = \int_0^T f(s)dW_s + \theta\int_0^T \hat{f}(s)ds$$

$\theta = 1/2$ のとき，$\int_0^T d_{1/2}W_s$ を以後は単に $\int_0^T d_*W_s$ と記すことにするが，これを**対称積分**という．

伊藤過程は B-微分可能であるが，逆は一般には正しくない．したがって，上で定義された対称積分 $\int_0^T f(s)dW_s$ はいわゆるストラトノヴィッチ– フィスク積分よりも広いクラスの乱関数を被積分関数の対象として持っていることを注意しておく．

4.4.3 後ろ向き積分

確率積分 $\int_0^t f(s)dW_s$ の対象としてまず想定された乱関数 f は，それによって意味を与えられる確率微分方程式の解，特に初期値問題問題；

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t \quad (0 \le t \le T, \quad X_0 = x_0)$$

の解 X_t であり，それゆえ被積分関数の可測性に因果性を要求するのは極めて自然なことでもあった．では上の SDE に対して終端値問題,

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t \quad (0 \le t \le T, \quad X_T = x_0) \qquad (4.15)$$

を考えれば状況はどのように変化するであろうか？　上の SDE にもし解 X_t があるとすれば, それは駆動力であるブラウン運動の未来 $\{W_T - W_s,\ 0 \le t \le s \le T\}$ と終端値 x_0 の関数でなければならない．したがって，確率積分の対象として次で定義される未来情報の篩 $\{\mathcal{F}^s,\ s \le T\}$

$$\mathcal{F}^s := \sigma\{W_T - W_r; s \le r \le T\}$$

に適合した乱関数 $f(t,\omega)$ を考える必要がある．すなわち，各 $t\ (\le T)$ ごとに $\mathcal{F}^t$-可測で条件,

$$P\left(\int_0^T f^2(t,\omega)dt < \infty\right) = 1$$

を満たす乱関数である．このようなものの全体を $\tilde{\mathcal{M}}_2$ と記し，**反因果的関数**ということにする．幸いにして伊藤積分をリーマン積分として導入した手順は，リーマン和 $S - \Delta(f:0)$ のとり方を以下のように修正しておけば，このような反因果的乱関数 f に対しても適用できることが容易にわかるであろう．

$$S_\Delta(f:1) := \sum_{t_i \in \Delta} f(t_{i+1})\{W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\}$$

ただし，$\Delta = \{0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n \le T\}$ は区間 $[0, T]$ の分割である．

すなわち $f \in \tilde{\mathcal{M}}_2$ であれば，$\lim_{|\Delta| \to 0} S_\Delta(f:1)$ が（確率）収束することが確められる．

定義 4.5

$$\int_0^T f(s,\omega) d_1 W_s := \lim_{|\Delta| \to 0} S_\Delta(f:1)$$

を f の**後ろ向き伊藤積分**（backward Itô integral，文献 7)，23) を参照）という．

言いかえれば，後ろ向き伊藤積分とは反因果的乱関数に対する $\mathcal{I}_1$ 型積分にほかならない．

註 4.4 通常の伊藤積分も後ろ向きのそれも，どちらも伊藤積分ではあるがリーマン和の作り方，すなわち使用する被積分関数の代表点のとり方，が同一ではないことに注意されたい．これに対して以下に記す，対称型リーマン和 $S_\Delta(f:1/2)$ は，被積分関数 f が因果的あるいは反因果的であるかにかかわらず，常に同じリーマン和をとっていることに注意されたい（**対称型**の由来である）．

では反因果的な乱関数 $f(t,\omega)$ に対して，一般の θ 型リーマン和 $S_\Delta(f:\theta)$ はどのような収束性を示すであろうか？

$$S_\Delta(f:\theta) = \sum_{t_i \in \Delta} \{f(t_i) + \theta \Delta_i f\} \Delta_i W$$

$$\Delta_i f = f(t_{i+1}) - f(t_i), \quad \Delta_i W = W(t_{i+1}) - W(t_i) \qquad (0 \le \theta \le 1)$$

$S_\Delta(f:\theta)$ の収束性を調べるために，次の概念を準備しておく；

定義 4.6 次のような反因果的乱関数 $f(t,\omega) \in \tilde{\mathcal{M}}_2$ を反因果的伊藤過程，あるいは反伊藤過程とよぶことにする．

$$f(t,\omega) = C - \int_t^T \alpha(s,\omega) ds - \int_t^T \beta(s,\omega) d_1 W_s \tag{4.16}$$

ただし，$\alpha(\cdot)$, $\beta(\cdot) \in \tilde{\mathcal{M}}_2$ である．

反伊藤過程の積分可能性については次の結果がある．

定理 4.6 (S.Ogawa[34]) $|\Delta| \to 0$ とするとき，$S_\Delta(f:\theta)$ は確率収束して次の等式が成り立つ．

$$\lim_{|\Delta|\to 0} S_\Delta(f:\theta) = \int_0^1 f(t,\omega)d_1W_t + (1-\theta)\int_0^1 \beta(t,\omega)dt \tag{4.17}$$

ここに $\beta(\cdot)$ は f の定義式 (4.16) に現れる係数である．

証明 項 $g(t) = \int_t^T \alpha(s)ds$ は微分可能であるから，$\mathcal{I}_1$- 積分可能であり，次式が成り立つことが部分積分法によって確かめられる．

$$\int_0^T g(t)d_\theta W_t = \int_0^T g(t)d_1W_t$$

したがって，$f(t) = -\int_t^T \beta(s\omega)d_1W_s$ である場合について調べればよい．

$$\Delta_i f := f(t_{i+1}) - f(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \beta(s)d_1W_s$$

であるから，$R(\Delta) := S_\Delta(f:\theta) - S_\Delta(f:1)$ とおくと，

$$\begin{aligned} R(\Delta) &= \sum_{t_i\in\Delta}(1-\theta)\Delta_i f\Delta_i W \\ &= (1-\theta)\sum_{t_i\in\Delta}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\beta(s)d_1W_s\int_{t_i}^{t_{i+1}}d_1W_s. \end{aligned}$$

これより，

$$\lim_{|\Delta|\to 0} R(\Delta) = (1-\theta)\int_0^T \beta(s)ds \quad (\text{確率収束})$$

を知る．以上の結果を整理して求める等式 (4.17) を得る． □

すなわち，因果的あるいは反因果的伊藤過程に対する対称積分 $\mathcal{I}_{1/2}(f)$ は次のように定義される．

定義 4.7 次で与えられる積分を伊藤過程，$f(t)$ に対する対称積分という．；

(1) 因果的伊藤過程に対しては，

$$\int_0^T f(t)d_{1/2}W_t = \int_0^T f(t)dW_t + \frac{1}{2}\int_0^T \hat{f}(t)dt$$

(2) 反因果的伊藤過程に対しては，

$$\int_0^T f(t)d_{1/2}W_t = \int_0^T f(t)d_1W_t + \frac{1}{2}\int_0^T \hat{f}(t)dt$$

5 確率解析 2—2 乗可積分マルチンゲールの場合

ブラウン運動 W_t に関する微積分について見てきたが，応用上はこれを一般のマルチンゲールに関する微積分にまで拡張しておくことが必要である．以下，右連続で 2 乗可積分なマルチンゲールを M_t $(0 \leq t \leq T)$, これに付随する情報の篩をこれまで同様 $\{\mathcal{F}_t\}$ で表すことにする．

5.1 再び伊藤積分

点 $t \in (0, T]$ を固定し，部分区間 $[0, t]$ の分割列 $\Delta_n(t) = \{2^{-n}kt,\ 0 \leq k \leq 2^n\}$ を作り，次のような量を構成する；

$$Q_t(n : M) := \sum_{k=0}^{2^n-1} \{M(2^{-n}(k+1)t) - M(2^{-n}kt)\}^2$$

このとき，

補題 5.1　各 $t \in (0, T]$ ごとに，確率収束の意味で極限

$$[M]_t := \lim_{n\to\infty} Q_t(n : M)$$

が存在する．またこの極限は分割列のとり方によらず定まる．$[M]_t$ をマルチンゲール M_t の **2 次変動過程**（quadratic variation）という．

証明は与えないが我々はこの結果を認めることにして議論を進めていく．

註 5.1 証明に興味がある方は適当な専門書（例えば文献 14)）を見られたい．

例 5.1 例えば，$M_t = \int_0^t f(s)dW_s$，$f \in \mathcal{M}_2$ であれば，$[M]_t = \int_0^t f^2(s)ds$ になっている．特に，$[W]_t = t$ である．

定義より 2 次変動過程 $[M]_t$ は t について確率 1 で単調増大であること，したがって $\int d[M]_t$ の形の積分はスティールチェス積分として意味を持つことがわかる．

M_t に関して因果的な乱関数のクラス，

$$\mathcal{M} = \left\{ f; \int_0^T f^2(s,\omega)d[M]_s < \infty, \quad P - a.s. \right\}$$

および，

$$\mathcal{M}_2 = \left\{ f \in \mathcal{M}; E\int_0^T f^2(s)d[M]_s < \infty \right\}$$

を考える．**M** 級の因果的乱関数に対してブラウン運動に関する伊藤積分 $\int f dW_s$ を定義したのと全く同様の手順で，$\mathcal{M}_2$ の関数 $f(t,\omega)$ に対して M_t に関する（伊藤型）確率積分 $\int_0^T f(s,\omega)dM_t$ を導入することができる．特に $f \in \mathcal{M}_2$ が平均連続であれば，この積分は次のような手順でも導入される．

$$\int_0^T f(s,\omega)dM_s = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{t_k \in \Delta} f(t_k,\omega)\{M_{t_{k+1}} - M_{t_k}\}$$
$$\Delta = \{0 \le t_1 < \cdots < t_n \le T\}, \quad |\Delta| = \max_k |t_{k+1} - t_k|$$

これについて議論の進め方は，ブラウン運動に関する伊藤積分 $\int dW_s$ の場合と同様である．

定理 5.1（$\mathbf{M}_t$ に関する伊藤積分） $M_t (0 \le t \le T)$ を連続で 2 乗可積分（$E[M_t^2] < \infty$）なマルチンゲールとする．確率積分 $I_t(f) = \int_0^t f dM_s$，$(0 \le t \le T)$ は次の性質を持つ；

(1) $\{I_t(f)\}$ は篩 $\{\mathcal{F}_t\}$ に関して局所マルチンゲールである．

(2) 特に $f \in \mathcal{M}_2$ であれば，$\{I_t(f)\}$ は篩 $\{\mathcal{F}_t\}$ に関するマルチンゲールであり，

$$E\left[\left(\int_0^T f dM_t\right)^2\right] = E\int_0^T f^2(s,\omega)d[M]_s$$

が成り立つ．

(3) 次のドゥーブの不等式が成り立つ；

$$E\left[\sup_{0\le t\le T}\left(\int_0^t f(s,\omega)dM_s\right)^2\right] \le 4E\left[\int_0^T f^2(s,\omega)d[M]_s\right] \quad (5.1)$$

X_t をマルチンゲール M_t と可予測な有界変動過程 V_t の和，$X_t = M_t + V_t$ で表されるセミマルチンゲールとする．dV_t に関して積分可能，$\int_0^T |f||dV_t| < \infty$, $P - a.s.$, な乱関数 f の全体を $L^1(dV_t)$ と書くことにする．例えば連続な見本関数を持つ乱関数 f は $L^1(dV_t)$ の元である．

定義 5.1　$f \in \mathcal{M}_2 \cap L^1(dV_t)$ について，X_t に関する伊藤型積分を次で定義する；

$$\int_0^T f(t,\omega)dX_t := \int_0^T f(t,\omega)dM_t + \int_0^T f\, dV_t$$

ブラウン運動に関する積分の場合と同様の手順で次の伊藤公式を導くことがでできる．

定理 5.2（伊藤公式）　セミマルチンゲール X_t が連続な見本関数を持つならば，C^2 級の有界関数 $\varphi(t,x)$ に対して次式（伊藤公式）が成り立つ．

$$d\varphi(X_t) = \varphi_t(t,X_t)dt + \varphi_x(t,X_t)dV_t + \frac{1}{2}\varphi_x x(t,X_t)d[M]_t + \varphi(t,X_t)dM_t \quad (5.2)$$

ここに，$\varphi_t = \dfrac{\partial}{\partial t}\varphi(t,x)$, $\varphi_x = \dfrac{\partial}{\partial x}\varphi(t,x)$ である．

例 5.2　$X_t = M_t$, $\varphi(t,x) = x^2$ すなわち，$\varphi(X_t) = M_t^2$ に上の伊藤公式 (5.2) を適用すれば，$dM_t^2 = 2M_t dM_t + d[M]_t$ となり，これより，

$$M_t^2 - [M]_t = 2\int_0^t M_s dM_s$$

よって，$M_t^2 - [M]_t$ がマルチンゲールになることがわかる．

次の結果はブラウン運動の特徴づけを与えている．

命題 5.1　$\{\mathcal{F}_t\}$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ における篩とし，M_t をこれに関する 2 乗可積分マルチンゲールとする．$[M]_t = t$ であれば M_t はブラウン運動である．

証明　$s < t$ について $M_t - M_s$ が $\mathcal{F}_s$ と独立で正規分布 $N(0, t-s)$ に従うことを示せばよい．それには $M_t - M_s$ の積率母関数が

$$E[\exp\{\alpha(M_t - M_s)\}|\mathcal{F}_s] = \exp\left\{\frac{\alpha^2}{2}(t-s)\right\} \quad ({}^\forall\alpha \in \mathbf{R}^1) \tag{5.3}$$

で与えられることを示せばよい．

$$Z_t = \exp\left\{\alpha M_t - \frac{\alpha^2}{2}[M]_t\right\} = \exp\left\{\alpha M_t - \frac{\alpha^2}{2}t\right\}$$

とおけば，伊藤公式 (5.2) より，

$$dZ_t = \alpha Z_t dM_t$$

となり，Z_t は $\{\mathcal{F}_t\}$ マルチンゲールである（後出の註 6.2 参照）．したがって，$E[Z_t/Z_s|\mathcal{F}_s] = 1$ すなわち，求める等式 (5.3) を得る．□

命題 5.2（部分積分公式）　これまで同様 M_t, N_t を連続で 2 乗可積分なマルチンゲールとし，U_t, V_t を連続で有界変動な可予測過程とする．このとき，セミ・マルチンゲール $X_t = M_t + U_t$, $Y_t = N_t + V_t$ について次の等式が成り立つ；

$$d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + d[M, N]_t$$

ここに，$[M, N]_t = (1/4)\{(M_t + N_t)^2 - (M_t - N_t)^2\}$ であり，M_t, N_t の相互変動関数という．

証明　実際，$(X_t + Y_t)^2, X_t^2, Y_t^2$ それぞれに伊藤公式を適用し，結果を整理すれば上の等式が得られる．□

例 5.3　$M_t = \int_0^t f\, dW_s$, $N_t = \int_0^t g\, dW_s$ $(f, g \in \mathbf{M}_2)$ とすれば，$[M,N]_t = \int_0^t f \cdot g\, ds$ である．$X_t = M_t$, $Y_t = N_t$ として上の命題を適用すれば次の等式が得られる．

$$\int_0^t f dW_s \int_0^t g dW_s$$
$$= \int_0^t f(s) \int_0^s g(r) dW_r dW_s + \int_0^t g(s) \int_0^s f(r) dW_r dW_s + \int_0^t f(s) g(s) ds$$

5.2　マルチンゲールに関する対称積分

ブラウン運動に関する対称積分については既に学習した．ここではブラウン運動のかわりにマルチンゲールが使われる場合について議論しておきたい．すなわち，$\{M_t, t \in \mathbf{T}\}$ を 2 乗可積分で連続なマルチンゲールとし，$\mathcal{M}_2$ 級の因果的乱関数 f の M_t に関する対称積分

$$\mathcal{I}_{1/2}(f) = \int_0^T f(t, \omega) d_{1/2} M_t$$

を考えたい．ちょっとした一般化であるが，結果として対称積分に基づく確率解析を使いやすく整備するための重要な作業である．

積分 $\mathcal{I}(f)$ そのものはブラウン運動の場合と同様の手順で導入される．

(1) $\{\Delta_n\}$, $\Delta_n = \{0 \le t_1^n < t_2^n < \cdots < t_{p(n)}^n \le T\}$ を $\mathbf{T} = [0, T]$ の分割列で $\lim_{n\to\infty} |\Delta_n| = 0$ であるものとする，ただし，

$$|\Delta_n| = \max_{0 \le i \le p(n)-1} |t_{i+1}^n - t_i^n|$$

である．

(2) $f \in \mathcal{M}_2$ と分割列 $\{\Delta_n\}$ で次の対称型リーマン和を考える；

$$S(f; \Delta_n) := \sum_{t_k \in \Delta_n} \frac{f(t_k) + f(t_{k+1})}{2} \{M_{t_{k+1}} - M_{t_k}\}$$

あるいは，

$$T(f;\Delta_n) := \sum_{t_k \in \Delta_n} f\left(\frac{t_k + t_{k+1}}{2}\right)\{M_{t_{k+1}} - M_{t_k}\}$$

(3) 極限 (確率収束) $\lim_{|\Delta_n|\to 0} S(f;\Delta_n)$*1 が存在すれば f は $[0,T]$ で M_t に関して対称積分可能であるといい, この極限を $\mathcal{I}_{1/2}(f) = \int_0^T f(s,\omega)d_{1/2}M_s$ と記す.

上の極限が収束するための十分条件が f の M_t に関する微分可能性によって記述される.

定義 5.2　因果的乱関数 $f \in \mathcal{M}_2$ に対して次のような乱関数 $\hat{f} \in \mathcal{M}_2$ が存在するとき, f はマルチンゲール M_t に関して微分可能であるといい, $\hat{f}$ を f の M-導関数といい, $\frac{\partial}{\partial M_t} f$ とも表す;

$$\sup_{t,t+h\in\mathbf{T}} E\left| f(t+h,\omega) - f(t,\omega) - \int_t^{t+h} \hat{f}(s,\omega)dM_s \right|^2 = o(h) \qquad (5.4)$$

例 5.4　例えば, $dX_t = f\,dM_t + a_t dt$, $(f \in \mathcal{M}_2,\ a_t \in \mathbf{M}_2)$ で定まるセミマルチンゲール X_t は M-微分可能で $\frac{\partial X_t}{\partial M_t} = f(t)$ となっている.

註 5.2 [M-導関数の一意性]　M-導関数 $\hat{f}$ は存在すれば $\mathcal{M}_2$ の要素として一意的に定まる. 実際, $\hat{f}$ を f の M-導関数とすれば, 任意の正数 ϵ に対して十分大きな n をとれば導関数の定義より, 次の評価

$$E\left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{(k-1)}{n}\right) - \int_{(k-1)/n}^{k/n} \hat{f}_s dM_s\right]^2$$
$$\le \epsilon E\left[\left|M\left(\frac{k}{n}\right) - M\left(\frac{(k-1)}{n}\right)\right|^2\right]$$

が成り立つ. 今 $\hat{f}_1(t), \hat{f}_2(t)$ を f の M-導関数とすれば定義式 (5.4) と三角不等式より,

---

*1 あるいは, $\lim_{|\Delta_n|\to 0} T(f;\Delta_n)$

$$E\int_0^T |\hat{f}_1(s)-\hat{f}_2(s)|^2 d[M]_s = E\left[\int_0^T \{\hat{f}_1(s)-\hat{f}_2(s)\}dM_s\right]^2$$

$$= E\left[\sum_{k=1}^n \int_{(k-1)/n}^{k/n} \{\hat{f}_1-\hat{f}_2\}dM_s\right]^2 = E\sum_{k=1}^n \left[\int_{(k-1)/n}^{k/n} \{\hat{f}_1-\hat{f}_2\}dM_s\right]^2$$

$$\leq \sum_{k=1}^n \left\{ E\left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{(k-1)}{n}\right) - \int_{(k-1)/n}^{k/n} \hat{f}_1 dM_s\right]^2 \right.$$

$$\left. + E\left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{(k-1)}{n}\right) - \int_{(k-1)/n}^{k/n} \hat{f}_2 dM_s\right]^2 \right\}$$

$$\leq 2\sum_{k=1}^n \epsilon\frac{1}{n} \ \leq \ 2T\epsilon$$

ϵ は任意であったから，これより，$E\int_0^T |\hat{f}_1(s)-\hat{f}_2(s)|^2 d[M]_s = 0$ を得る．

定理 5.3　$f \in \mathcal{M}_2$ が M_t に関して微分可能であれば，対称型リーマン和の列 $S(f;\Delta_n)$*2 は $n \to \infty$ で確率収束し，極限 $\mathcal{I}_{1/2}(f)$ は次の関係式を満たす;

$$\int_0^T f(s)d_{1/2}M_s = \int_0^T f(s)dM_s + \frac{1}{2}\int_0^T \hat{f}_s d[M]_s.$$

セミマルチンゲール $X_t = M_t + V_t$ （V_t は有界変動な可予測過程）に対する対称積分 $\int_0^T f(t)d_{1/2}X_t$ を

$$\int_0^T f(t)dX_t = \int_0^T f(t)dV_t + \int_0^T f(t)d_{1/2}M_t$$

で与えることにする．

例 5.5　対称積分を用いれば，セミマルチンゲール $X_t = M_t + V_t$ に関する伊藤公式 (5.2) は次のように古典解析でなじみの形に書ける；

*2同様に，$T(f;\Delta_n)$ も

$$d\varphi(t,X_t) = \varphi_t(t,X_t)dt + \varphi_x(t,X_t)dV_t + \varphi_x(t,X_t)d_{1/2}M_t$$
$$= \varphi_t(t,X_t)dt + \varphi_x(t,X_t)d_{1/2}X_t$$

例 5.6　$f,\ g \in \mathcal{M}_2$ とし $M_t = \int_0^t g(s)dW_s$ とおく．f がマルチンゲール M_t に関して対称積分可能であるとしよう．一般に次の 2 式は成立しないことを注意しておく；

$$\int f\ d_{1/2}M_t \neq \int f\cdot g\ d_{1/2}W_t, \quad \int f\ d_{1/2}M_t \neq \int f\cdot g\ dW_t.$$

実際，$df = adt + bdM_t$ とでもすれば，$\partial f/\partial M_t = b$，$d[M]_t = g^2dt$ であるから

$$\int fd_{1/2}M_t = \int fg\ dW_t + \frac{1}{2}\int bg^2\ dt$$

であり，

$$\int f\cdot gd_{1/2}W_t = \int fgdW_t + \frac{1}{2}\int \frac{\partial}{\partial W_t}(fg)dt \neq \int f\ d_{1/2}M_t$$

註 5.3 この 5.2 節（M-可微分過程）で扱ったマルチンゲールは連続であり，ほぼブラウン運動に等しいものであるから，特に一般化というほどのことでもない．ただ，わざわざ説明を展開したのはよくありがちな計算間違いを避けるために，上の例のようなまぎらわしい事柄を整理しておきたかったからである．

6

確率微分方程式

ブラウン運動により駆動される確率微分方程式の初期値問題について，解の存在や一意性などに関する基本的な結果を解説し，次いで熱方程式の解の構成などの応用について考える．

6.1 初期値問題

実数値ブラウン運動 W_t と $[0,T] \times \mathbf{R}^1$ 上の実数値関数 $a(t,x)$, $b(t,x)$, および上のブラウン運動とは独立な確率変数 $X_0(\omega)$ が与えられたとき，次のような等式を満たす因果的な確率過程 X_t を求める問題を考える．

$$X_t = X_0(\omega) + \int_0^t a(s, X_s)ds + \int_0^t b(s, X_s)dW_s, \quad t \in [0,T] \tag{6.1}$$

これは次のような形式的な形でも表現される．

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t, \quad X_0 = X_0(\omega) \tag{6.2}$$

これを確率微分方程式の初期値問題という．確率微分方程式は往々にして SDE ともよばれるがこれは英語名 stochastic differential equation からとった略語である．

定義 6.1 実数値確率過程 $X_t(\omega)$, $t \geq 0$ が初期値問題 (6.1) の解であるとは，

(1) ブラウン運動に関して因果的な乱関数であって，$a(t, X_t)$, $b(t, X_t)$ が **M** 級の因果的乱関数になり，かつ，

(2) 各 $t \in [0,T]$ ごとに等式 (6.1) を確率 1 で満たす，

ことをいう．SDE (6.2) の解が一意的であるとは，全ての解が**確率的に同値** (stochasticaly equivalent) であること，すなわち，$X_1(t)$, $X_2(t)$ を解とすれば，各 $t \in [0,T]$ ごとに $P(X_1(t) = X_2(t)) = 1$ が成り立つことを意味する．特に見本関数が一意的であるとき，すなわち $P({}^\forall t \in [0,T],\ X_1(t) = X_2(t)) = 1$ であるとき**軌道ごとの一意性** (pathwise uniqueness) **が成り立つ**という．また X がしかるべき関数空間に導く確率分布が一意的である場合は，**分布の意味で一意的である**という．

多次元の確率過程 $\mathbf{X}_t = {}^t(X_t^1, X_t^2, \cdots, X_t^d) \in \mathbf{R}^d$ についての確率微分方程式も考えることができて，一般に次のような形になる．

$$d\mathbf{X}_t = \mathbf{a}(t, \mathbf{X}_t)dt + \mathbf{b}(t, \mathbf{X}_t)d\mathbf{W}_t, \quad \mathbf{X}_0 = \mathbf{X}_0(\omega) \tag{6.3}$$

ただし，$\mathbf{a}(t,\mathbf{x}) = {}^t(a^1(t,\mathbf{x}), a^2(t,\mathbf{x}), \cdots, a^d(t,\mathbf{x}))$, $(t,\mathbf{x}) \in [0,T] \times \mathbf{R}^d$ は d 次元ベクトル値関数，また $\mathbf{b}(t,\mathbf{x}) = \{b_j^i, 0 \le i \le d,\ 0 \le j \le m\}$ は $d \times m$ 行列値関数であり，$\mathbf{W} = {}^t(W^1, W^2, \cdots, W^m)$ は m 次元ブラウン運動である．多次元 SDE の解と一意性についても上の定義 6.1 と同様に定めるものとする．

6.1.1 解の存在と一意性

議論の概要を手早くつかむために 1 次元 SDE (6.2) の場合について議論しておく．

仮定 (A) 係数 $a(\cdot), b(\cdot)$ および初期値 $X_0(\omega)$ は次の条件 (a.1),(a.2),(a.3) を満たす：

(a1) 係数 $a(t,x), b(t,x)$ は連続であり，特に x についてはリプシッツ (Lipschitz) 連続であるとする，すなわち；適当な正定数 $L > 0$ が存在し任意の $(t,x), (t,y) \in [0,T] \times \mathbf{R}^1$ に対して次の条件が成り立つとする．

$$|a(t,x) - a(t,y)| \le K|x-y|, \quad |b(t,x) - b(t,y)| \le K|x-y|$$

(a2) 適当な正定数 K が存在し，任意の $t \in [0,T]$ について次の不等式が成り立つ．

$$|a(t,x)|,\ |b(t,x)| \le K\sqrt{1+|x|^2}$$

(a3) $X_0(\omega)$ は因果的（すなわち，$t=0$ 以前のブラウン運動に関して独立）で $E|X_0|^2<\infty$ とする．

註 6.1 例えば，$a(t,x), b(t,x)$ が x について偏微分可能で，偏導関数 $a'_x = (\partial/\partial x)a(t,x), b'_x(t,x) = (\partial/\partial x)b(t,x)$ が有界（$\sup_{(t,x)}|a'_x| < \infty$, $\sup_{(t,x)}|b'_x|<\infty$）であれば上の仮定 (A) は満たされる．

解の存在を見るために**逐次近似法**（ピカール（Picard）の方法ともいう）を適用してみる．すなわち，次のように帰納的に構成される乱関数列 $\{X_n(t)\}$ を考える．

$$\begin{cases} X_0(t) = X_0(\omega) \\ X_1(t) = X_0(\omega) + \displaystyle\int_0^t a(s, X_0(s))ds + \int_0^t b(s, X_0(s))dW_s \\ \quad X_n(t) \text{ まで構成されたとして，} X_{n+1}(t) \text{ を次で与える．} \\ X_{n+1}(t) = X_0(\omega) + \displaystyle\int_0^t a(s, X_n(s))ds + \int_0^t b(s, X_n(s))dW_s \end{cases} \tag{6.4}$$

我々は乱関数列 $\{X_n(t)\}$ が解の近似列になることを期待しているのであるが，実際 $\{X_n(t)\}$ は区間 $[0,T]$ 上で確率 1 で一様収束する．以下，そのことを次のようにして順々に確認していこう；

1) 初期値 $X_0(\omega)$ がブラウン運動とは独立で 2 乗可積分（$E|X_0|^2<\infty$）な確率変数であれば，$\{X_n\}$ は $\mathbf{M}_2$ 級の因果的乱関数としてうまく定義されていることに注意する．実際，まず $X_0(t)=X_0(\omega)$ は因果的であり，仮定より $E|X_0|^2<\infty$ であるから $n=0$ についてはそのとおりである．n まで正しかったとすると，$a(t,X_n(t))$, $b(t,X_n(t))$ は明らかに因果的である．さらに仮定 (a2) より，

$$E\int_0^T |b(t,X_n(t))|^2 dt \le K^2 \int_0^T (1+|X_n(t)|^2)dt < \infty$$

であるから $b(t,X_n(t)) \in \mathbf{M}_2$ が従い，これより確率積分 $\int_0^T b(t,X_n(t))dW_t$ が存在し結果として $X_{n+1}(t)\in\mathbf{M}_2$ であることがわかる．

2) $d_n(t) = E|X_n(t) - X_{n-1}(t)|^2$ とおく．定義式 (6.4) より，

$$X_n(t) - X_{n-1}(t) = \int_0^t \{a(s, X_{n-1}(s)) - a(s, X_{n-2}(s))\}ds + \int_0^t \{b(s, X_{n-1}(s)) - b(s, X_{n-2}(s))\}dW_s$$

であるから，これとシュワルツ (Schwartz) の不等式より，

$$\begin{aligned} d_n(t) &\le 2E\left[\left(\int_0^t \{a(s, X_{n-1}(s)) - a(s, X_{n-2}(s))\}ds\right)^2 + \left(\int_0^t \{b(s, X_{n-1}(s)) - b(s, X_{n-2}(s))\}dW_s\right)^2\right] \\ &\le 2\left[T\int_0^t E|a(s, X_{n-1}(s)) - a(s, X_{n-2}(s))|^2 ds + \int_0^t E|b(s, X_{n-1}(s)) - b(s, X_{n-2}(s))|^2 ds\right] \\ &\le 2(T+1)K^2 \int_0^t E|X_{n-1}(s) - X_{n-2}(s)|^2 ds \\ &= C\int_0^t d_{n-1}(s)ds \quad (C = 2(T+1)K^2) \end{aligned} \tag{6.5}$$

を得る．

$$d_1(t) = E|X_1(t) - X_0(t)|^2 \le 2(T+1)K^2 C_1 t, \quad C_1 = 1 + E|X_0|^2$$

であることに注意して上の積分不等式 (6.5) を逐次的に解けば次の評価式に至る．

$$d_n(t) \le C_1 \frac{(Ct)^n}{n!} \tag{6.6}$$

3) これから直ちに近似列 $\{X_n\}$ が $t \in [0, T]$ について一様に 2 次平均収束すること，すなわち，

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\le t\le T} E[|X_n(t) - X_\infty(t)|^2] = 0$$

となる極限 X_∞ の存在が示されるが，我々はもう少し先へ行ってみる．

4) 再び定義式 (6.4) より，

$$\max_{0\le t\le T}|X_{n+1}(t)-X_n(t)| \le \max_t\left\{\left|\int_0^t \alpha_n(t)dt\right| + \left|\int_0^t \beta_n(t)dW_t\right|\right\}$$

ここに，

$$\alpha_n(t)=a(t,X_n(t))-a(t,X_{n-1}(t))$$
$$\beta_n(t)=b(t,X_n(t))-b(t,X_{n-1}(t))$$

任意の正数 M について，

$$P(\max_{0\le t\le T}|X_{n+1}(t)-X_n(t)|>2M) \le P\left(\max_t\left|\int_0^t \alpha_n(s)ds\right|>M\right)+P\left(\max_t\left|\int_0^t \beta_n(s)dW_S\right|>M\right) \tag{6.7}$$

右辺第 1 項については，評価式 (6.6) より，

$$P\left(\max_t\left|\int_0^t \alpha_n(s)ds\right|>M\right) \le P\left(T\int_0^T \alpha_n^2(s)ds>M^2\right) \le \frac{K^2T}{M^2}E\int_0^T d_{n-1}(t)dt \le C_2\frac{(CT)^n}{n!M^2}$$

ここで，

$$C_2=\frac{C_1K^2T}{C}$$

第 2 項については劣マルチンゲールに関するコルモゴロフ不等式を適用して次の評価；

$$P\left(\max_t\left|\int_0^t \beta_n(s)dW_s\right|>M\right) \le \frac{1}{M^2}E\left[\left(\int_0^T \beta_n(t)dW_t\right)^2\right] \le \frac{K^2}{M^2}\int_0^T d_{n-1}(t)dt \le C_3\left(\frac{(CT)^n}{n!M^2}\right)$$

ここに，$C_3 = \max\{C_2,\ (C_1K^2/C)\}$ である．

以上の評価式で $M = \dfrac{1}{\sqrt[4]{n!}}$ とおき，まとめて式 (6.7) に戻れば次が得られる．

$$P\left(\max_{0\le t\le T}|X_{n+1}(t) - X_n(t)| > 2\frac{1}{\sqrt[4]{n!}}\right) \le 2C_3\frac{(CT)^n}{\sqrt{n!}}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}(CT)^n/\sqrt{n!} < \infty$ であるから，おなじみのボレル–カンテリ第1補題より，十分大きな n に対しては常に次の不等式が確率1で成り立つことがわかる；

$$P\left(\max_{0\le t\le T}|X_{n+1}(t) - X_n(t)| \le 2\frac{1}{\sqrt[4]{n!}}\quad \forall \text{十分大きな } n\right) = 1$$

$\sum_{n=1}^{\infty}(1/\sqrt[4]{n!}) < \infty$ であるから，以上より $\{X_n(t)\}$ は確率1で $t \in [0,T]$ について一様に収束することが確められた．

5) したがって極限 $\lim_{n\to\infty} X_n(t) = X_\infty(t)$ が存在するが，逐次近似列の定義式 (6.4) の両辺で $n \to \infty$ と極限をとってやれば $X_\infty(t)$ が SDE の解であることがわかる；

$$X_\infty(t) = X_0(\omega) + \int_0^t a(s, X_\infty(s))ds + \int_0^t b(s, X_\infty(s))dW_s$$

よって次の定理の大半が示された．

定理 6.1 係数と初期値が仮定 (A) を満たすとき，初期値問題 (6.2) は $W_t(t \le 0)$ と独立な任意の初期値 $X_0(\omega)$ に対して一意的な解 $X_t(\omega)$ を持ち，この解は確率1で連続な見本関数を持つ．

証明 $X_\infty(t)$ は連続な近似列の一様収束極限であったから，確率1で連続である．解の一意性を示す必要がある．

$X(t), Y(t)$ を因果的な **M** 級の乱関数で SDE(6.2) の解としたとき，

$$^\forall t \in [0,T] \text{ について } \ P(X(t) = Y(t)) = 1$$

であることを示せばよい．

$$X(t)-Y(t)=\int_0^t\{a(s,X(s))-a(s,X(s))\}ds$$
$$+\int_0^t\{b(s,X(s))-b(s,Y(s))\}dW_s$$

であるから，$e(t)=E|X(t)-Y(t)|^2$ とおけば，項 $d_n(t)$ の評価を得たときと同様の議論に従って，

$$e(t)\le 2K^2(1+T)\int_0^t e(s)ds$$

を得る．グロンウォル不等式（下記）より $e(t)=0$，したがって各 t ごとに $P(X(t)\neq Y(t))=0$ を知る．□

6.1.2　補足と一般の場合の結果

まず上で与えた 1 次元 SDE に関する議論について，補足事項を以下に箇条書きで記しておく．

1)　軌道ごとの一意性；解の一意性に関して，もし二つ $X(t),Y(t)$ あるとすれば，

$$^\forall t\in[0,T],\quad P\{X(t)=Y(t)\}=1$$

であることを見たが，$[0,T]$ 内の有理数は可算個しかないので上の結果から次のことがわかる．

$$P\left(\bigcup_{t\in[0,T]\cap Q}\{X(t)\neq Y(t)\}\right)=0$$

ここに $Q=$ **有理数の集合**である．$X(t),Y(t)$ は平均連続（したがって確率連続）であったから可分である．このことから次のさらに強い結果が導かれる；

$$P(X(t)=Y(t),\ ^\forall t\in[0,T])=1$$

すなわち，上の条件下で考えた SDE の解は標本関数も一意的である．このことを軌道一意性（pathwise uniqueness）が成り立つという．

2) 上で使ったグロンウォル (Gronwall) 不等式とは次のような事柄である；

補題 6.1 $f(t)$ を積分可能な関数とする．$x(t), t \in [0,T]$ 連続関数で,

$$\frac{d}{dt}x(t) \leq f(t)x(t), \quad x(0) = x_0$$

を満たすならば，$x(t) \leq x_0 \exp\{\int_0^t f(s)ds\}$ が成り立つ．

証明 実際，$C(t) = \exp\{-\int_0^t f(s)ds\} > 0$ に注意して次の不等式を得る．

$$\frac{d}{dt}(x(t)C(t)) = C(t)\left\{\frac{d}{dt}x(t) - f(t)x(t)\right\} \leq 0$$

これより，

$$x(t) \leq C(t)^{-1}x(0)C(0) = x_0 \exp\left\{\int_0^t f(s)ds\right\}$$

で結論に至る． □

3) 定理において係数のリプシッツ連続性を仮定したが，**M** 級の解の存在と一意性は単に係数が連続的微分可能であるとしても保証される．また解の存在だけなら連続性だけでもよい．ただし，この場合は一意性が保証されるとは限らない（例えば，文献 14)）．

同様な結果が多次元 SDE(6.3) についても成立する．後の便宜のために証明なしで記しておく．

定理 6.2 係数 $\mathbf{a}(t,\mathbf{x}), \mathbf{b}(t,\mathbf{x})$ と初期値 $\mathbf{X}_0(\omega)$ の各成分が仮定 (A) の条件を満たすとき，多次元 SDE の初期値問題 (6.3) は一意的な $\mathbf{M}_2$ 級解を持つ．ただし，仮定 (A) において，$|x|^2$ は $|x|^2 = \sum_{k=1}^d |x^i|^2$ を表すものとする．

例 6.1（ブラック–ショールズモデル） 次の SDE はブラック–ショールズのモデルとして知られるものである；

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (S_0 = s_0 \geq 0) \tag{6.8}$$

r, σ は定係数であり，r は短期利率を表し，σ はボラティリティ (volatility) とよばれ，市場のランダムな揺動の強さを表す係数である．

この方程式の場合 $a(t,x) = rx$, $b(t,x) = \sigma x$ であるから，定理 6.1 の条件は満たされており，したがってこの定理より初期値問題 (6.8) は一意的な解を持つことがわかる．解 $S(t)$ を具体的に求めてみるために，$Y(t) = S(t)\exp\{-rt\}$ とおいてみる．伊藤公式より

$$dY(t) = rY(t)dt + \sigma Y(t)dW_t - rY(t)dt = \sigma Y(t)dW_t$$

である．これを初期条件 $Y(0) = S(0) = s_0$ の下で解けば，

$$Y(t) = s_0 \exp\left\{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t\right\}$$

となり，これより

$$S(t) = s_0 \exp\left\{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right\}$$

を得る．

例 6.2（指数的マルチンゲール） $f(t,\omega)$ を因果的な乱関数で，条件

$$E\exp\left\{\int_0^T f^2(s,\omega)ds\right\} < \infty \tag{6.9}$$

を満たすものとする．

$$Z_t = \exp\left\{-\int_0^t f(s,\omega)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t f^2(s,\omega)ds\right\}$$

とおけば，Z_t は篩 $\{\mathcal{F}_t\}$ に関してマルチンゲールであって，$E[Z_t] = 1$ が成り立つ．

実際，仮定 (6.9) の下で Z_t は可積分であり（註 6.2 を見よ），

$$Y_t = -\int_0^t f(s,\omega)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t f^2(s,\omega)ds$$

とおけば $Z_t = \exp\{Y_t\}$ であるから，伊藤公式より

$$dZ_t = -f(t,\omega)Z_t dW_t$$

が導かれ，これより Z_t がマルチンゲールであることがわかる．したがってさらに $E[Z_t] = E[Z_0] = 1$ であることもわかる．

註 6.2 (6.9) をノビコフ（Novikov）の**条件**という．この条件が満たされれば，

$$Z_t = \exp\left\{-\int_0^t f(s,\omega)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t f^2(s,\omega)ds\right\}$$

は，確率 P に関して可積分となることが知られている．

4) ところで，事象 $A \in \mathcal{F}$ の確率 $P(A)$ は $P(A) = E[\mathbf{1}_A]$ のように期待値としても表現できる．上で定義した Z_t を使って，$(\Omega, \mathcal{F})$ 上の測度 $Q_t(\cdot)$ を次で導入する．

$$Q_t(A) = E[\mathbf{1}_A Z_t]$$

$Z_t > 0$ であり，$EZ_t = 1$ であったから $Q_t(\cdot)$ は確率であることがわかる．出発点で与えたブラウン運動 W_t を，この確率でもって構成される確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, Q_t)$ の上でとらえればどのように見えるであろうか？　これを考えるために次のように推論してみる．
$dY_t = dW_t + f(t,\omega)dt$ で決定される確率過程 Y_t を考えると，伊藤公式より，

$$\begin{aligned} d(Y_t Z_t) &= Z_t dW_t + Z_t f(t,\omega)dt - Z_t f(t,\omega)Y_t dW_t - Z_t f(t,\omega)dt \\ &= Z_t(1 - f(t,\omega)Y_t)dW_t \end{aligned}$$

となる．右辺はこれまでの確率 P に関してマルチンゲールであるから左辺も同様である．したがって任意の $A \in \mathcal{F}_s (s \le t)$ に対して $E[Y_t Z_t 1_A] = E[Y_s Z_s 1_A]$ が成り立つ．一方，確率 Q に関する期待値演算を記号 E^Q で表すことにすれば，

$$E^Q[Y_t 1_A] = E[Y_t Z_t 1_A] = E[Y_s Z_s 1_A] = E^Q[Y_s 1_A]$$

であるから，これより $Y_s = E^Q\{Y_t | \mathcal{F}_s\}$　$P - a.s.$ が成り立つ．すなわち Y_t は Q-マルチンゲールである．ところが，明らかに Y_t の 2 次変動量は，$[dY_t] =$

$dt = [dW_t]$ であるから Y_t は確率 Q の下でブラウン運動であることがわかる．よって次のギルサノフの定理を得た．

定理 6.3（ギルサノフの定理） $f \in \mathbf{M}$ がノビコフの条件 (6.9) を満たすとき，

$$Y_t = W_t + \int_0^t f(s,\omega)ds$$

で与えられる確率過程 Y_t は $Q_t(A) = \int_A Z_t dP(A \in \mathcal{F}_t)$ で定まる確率 Q に関してブラウン運動となる．

6.1.3 マルコフ性と熱方程式

SDE の解 X の性質について注意をしておこう．単に議論と記述の簡単のために 1 次元 SDE(6.1) で初期値 X_0 は定数 x_0 である場合に対象を限ることにする．$0 \le s < t \le T$ ととれば，解 X_t は次のようにも表される．

$$X_t = X_s + \int_s^t a(r, X_r)dr + \int_s^t b(r, X_r)dW_r$$

第 1 項目 X_s は $\mathcal{F}_s$ 可測な確率変数であり，第 2 項は X_s と $W_r - W_s$ の形の確率変数との合成汎関数である．$W_r - W_s$ は X_s と独立であるから，s を現在時刻と思えば未来値 X_t の過去のデータ $\{X_r, r \ge s\}$ に関する条件付き確率は現在値 X_s に関するデータのみに依存して定まることを意味している; すなわち $A \in B_{\mathbf{R}}$ について，

$$P(X_t \in A | X_r, r \le s) = P(X_t \in A | X_s)$$

よって SDE の解 X_t はマルコフ過程であることがわかる．X_t の推移確率にもし密度 $p(s,x,t,y)$ があれば，それはどのような性質を持つであろうか？　ただし，

$$p(s,x,t,y)dy = P(X_t \in dy | X_s = x)$$

である．

初期値 $X_0(\omega)$ の分布密度関数を $f(x)$ とすれば，X_t の分布密度関数 $u(t,x)$ は $u(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(s,y,t,x)f(y)dy$ で与えられる．今，十分に滑らかで有界な

台を持つ関数 $\varphi(x)$ について $E[\varphi(X_t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)u(t,x)dx$ の変動を調べてみる．伊藤公式より，

$$d\varphi(X_t) = \left\{\varphi'(X_t)a(t,X_t) + \frac{1}{2}\varphi''(X_t)b^2(t,X_t)\right\}dt + \varphi'(X_t)b(t,X_t)dW_t$$

であるから，

$$\frac{d}{dt}E[\varphi(X_t)] = E\left[\varphi'(X_t)a(t,X_t) + \frac{1}{2}\varphi''(X_t)b^2(t,X_t)\right]$$

すなわち，

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)u(t,y)dy = \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\varphi'(y)a(t,y) + \frac{1}{2}\varphi''(y)b^2(t,y)\right\}u(t,y)dy$$

を得る．$\varphi(\pm\infty) = \varphi'(\pm\infty) = 0$ に注意して部分積分を適用し整理すれば，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)\left\{\frac{\partial}{\partial t} + L\right\}u(t,y)dy = 0 \tag{6.10}$$

が成り立つ．ここに，

$$Lu = \frac{\partial}{\partial y}(au) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(b^2u)$$

等式 (6.10) が任意のテスト関数 $\varphi(x)$ について成立することから，$u(t,x)$ は次の放物型方程式の初期値問題の解であることがわかる；

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = -\frac{\partial}{\partial x}(au) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(b^2u), \quad u(s,x) = f(x)$$

言いかえれば推移確率密度関数　$p(s,x,t,y)$ は (t,y) について見れば，上の初期値問題の基本解になっており，

$$\frac{\partial}{\partial t}p = \mathcal{L}^*p, \quad p(s,x,s,y) = \delta_x(y)$$

ここに，

$$\mathcal{L}^*u = -\frac{\partial}{\partial x}(au) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(b^2u),$$

であることがわかる．この方程式を**コルモゴロフの前向き方程式**，あるいは物理では**フォッカー–プランク**（Fokker-Planck）**の方程式**ともいう．放物型方程

式は熱力学的現象を記述する方程式であり，上の事柄から SDE は熱力学的現象の確率的描像を与えるモデルであることがわかる．

ところで，X_t を次の SDE の解とし，

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t, \quad X_s = x$$

十分に滑らかで導関数も有界な関数 $\varphi(x)$ をとって

$$v(s, x) = E[\varphi(X_T)|X_s = x] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)p(s, x, T, y)dy$$

とおいてみる．$v(t, X_t)$ に伊藤公式を適用すれば，

$$v(T, X_T) = v(t, X_t) + \int_t^T \left\{ \frac{\partial}{\partial r} v(r, X_r) + a(r, X_r) \frac{\partial}{\partial x} v(r, X_r) \right. \\ \left. + \frac{b^2(r, X_r)}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(r, X_r) \right\} dr + \int_t^T b(r, X_r) \frac{\partial}{\partial x}(r, X_r) dW_r \tag{6.11}$$

$v(T, X_T) = \varphi(X_T)$ であるから，$E[v(T, X_T)|X_t = x] = E[\varphi(X_T)|X_t = x] = v(t, x)$ であることに注意して，上の等式 (6.11) 両辺の条件付き期待値 $E[\,\cdot\,|X_t = x]$ をとり，整理すれば，

$$0 = E\left[\int_t^T \left\{ \tfrac{\partial}{\partial r} v(r, X_r) + a(r, X_r) \tfrac{\partial}{\partial x} v(r, X_r) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{b^2(r, X_r)}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(r, X_r) \right\} dr \,\middle|\, X_t = x \right]$$

となる．これより $v(t, x)$ は次の終端値問題の解であることがわかる．

$$\frac{\partial}{\partial t} v(t, x) + a(t, x) \frac{\partial}{\partial x} v(t, x) + \frac{1}{2} b^2(t, x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(t, x) = 0, \quad t \in [0, T) \\ v(T, x) = \varphi(x) \tag{6.12}$$

逆に言えば，上の熱方程式の終端値問題の解 $v(t, x)$ は SDE の解 X_t によって $v(t, x) = E[\varphi(X_T)|X_t = x]$ と表されることになる．これを**ファインマン–カッツの公式** (Feynman-Kac's formula) という．一方，

$$v(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)p(t,x,T,y)dy$$

であり関数 $\varphi(x)$ の選択は任意であったから，X_t の推移確率密度関数は $p(s,x) = p(s,x,t,y)$ は各固定した (t,y) ごとに変数 (s,x) について次の関係式を満たすこともわかる．

$$\frac{\partial}{\partial s}p(s,x) + a(s,x)\frac{\partial}{\partial x}p(s,x) + \frac{1}{2}b^2(s,x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}p(s,x) = 0, \quad t \in [0,T),$$
$$p(t,x) = \delta_y(x)$$

この方程式を**コルモゴロフの後ろ向き方程式** (backward equation) という．

例 6.3 S_t を SDE(6.8) の解とし，$C(t,S) = E[\varphi(S_T)|S_t = S]$ とすれば，$C(t,S)$ は次の終端値問題の解として与えられる．

$$\frac{\partial}{\partial t}C(t,S) + rS\frac{\partial}{\partial S}C(t,S) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}C(t,S) = 0, \quad t \in [0,T),$$
$$C(T,S) = \varphi(S)$$

これまでに説明した事柄から，熱方程式のような放物型方程式の（初期値，あるいは終端値問題の）解は適当な SDE の解 X_t により表現されることがわかる．この関係は境界値問題についても詳しく調べられている．SDE と放物型方程式のこうした関係は関数解析の格好の話題（附録の 9.11 を参照のこと）であり，応用面からも重要な事柄ではあるが，紙数の制限もあり本書の守備範囲に含めるには大きすぎるので省略する．適切な専門書を見られたい（例えば，文献 6)）．

6.1.4 SDE とマルチンゲール

SDE(6.1)

$$dX_t = a(t,X_t)dt + b(t,X_t)dW_t$$

の解 X_t と対応する放物型方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}v(t,x) + a(t,x)\frac{\partial}{\partial x}v(t,x) + \frac{1}{2}b^2(t,x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(t,x) = 0$$

の解 $v(t,x)$ との関係を述べておこう．これらを合成した乱関数 $Y_t := v(t,X_t)$ を考え，これに伊藤公式を適用してみると；

$$\begin{aligned} dY_t &= \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t} + a(t,x)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}b^2(t,x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) v \right\}(t,X_t)dt \\ &\quad + \left\{ b(t,x)\frac{\partial}{\partial x}v \right\}(t,X_t)dW_t \\ &= \left\{ b(t,x)\frac{\partial}{\partial x}v \right\}(t,X_t)dW_t \end{aligned}$$

すなわち，

$$Y_t = \text{定数} + \int_0^t \left\{ b\frac{\partial}{\partial x}v \right\}(s,X_s)dW_s$$

となり，Y_t は $\mathcal{F}_t$-マルチンゲールになることがわかる．

6.2　対称型 SDE の場合

確率微分方程式の実体は確率積分により規定されており，採用する確率積分が異なればその意味も変わる．これまで扱ってきた SDE は伊藤積分に対するものであった．本節では確率積分として対称積分を採用した場合を取り上げ，特に理論の応用的側面からそのことによる変化を見ておきたい．本節では 2 種類の確率積分が同時に登場するので，そのための記号を準備しておく必要がある．$\mathbf{M}_2$ 級，あるいは $\mathbf{M}_2^1$ 級の因果的乱関数 $f(t,\omega)$ の積分として，$I_0(f) = \int f dW_t$ でもって伊藤積分を，また $I_{1/2}(f) = \int f d_{1/2}W_t$ でもって対称積分を表すことにする．

$f \in \mathbf{M}_2^1$ とし，その B-導関数を $\hat{f} = (\partial/\partial W_t)f$ とする．既に見たように対称積分 $\int f d_{1/2}W$ と伊藤積分 $\int f dW$ との関係は（定理 4.5）式で与えられている；

$$\int_0^t f(s)d_{1/2}W_s = \int_0^t f(s)dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t \hat{f}(s)ds.$$

特に f が伊藤過程で $df = \alpha(t)dt + \beta(t)dW_t$ であれば $\hat{f} = \beta(t)$ であることを思い出しておこう．対称積分で解釈した確率微分方程式の初期値問題，

$$dX_t = a(t,X_t)dt + b(t,X_t)d_{1/2}W_t, \quad X_0 = x_0 \tag{6.13}$$

の解は B 微分可能であり $\hat{X}_t = b(t, X_t)$ であるから，$b(t,x)$ が t について $\alpha(>1/2)$ 次ヘルダー連続であれば $b(t, X_t)$ も B 微分可能で，

$$\frac{\partial}{\partial W_t} b(t, X_t) = b(t, X_t)\left(\frac{\partial}{\partial x} b\right)(t, X_t)$$

となる．したがって，対称積分で書かれた原方程式を伊藤積分で見直せば次のようになる，

$$dX_t = \left\{a(t, X_t) + \frac{1}{2} b(t, X_t) b_x(t, X_t)\right\} dt + b(X_t) dW_t, \quad X_0 = x_0 \quad (6.14)$$

推移係数（dt にかかる係数，**ドリフト係数**ともいう）に必要な補正を施すだけで伊藤型 SDE に戻るから，その分だけ係数に対する条件を強くすれば，解の存在や一意性は伊藤型 SDE の場合と同様に議論することができ，そしてこの状況は多次元 SDE の場合も同様である．それゆえ，解の存在・一意性や解の性質に関する定性的議論をする限りでは対称型 SDE は伊藤型 SDE の具体例にすぎないが，対称積分に基づく演算は古典解析における微積分演算の形式と整合的であり，したがって応用的局面での利便性は極めて大きい．

例 6.4 卑近な例としてブラック–ショールズの SDE モデルを取り上げる;

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad S_0 = s_0 \quad (6.15)$$

これを株価 S_t の変動を記述する方程式として導出する際に，「株価の単位時間当たりの増加率 dS_t/S_t は短期利率 r に比例するが，市場のランダムな変動にも影響されるので次のような方程式を満たすことが期待される」

$$\frac{dS_t}{S_t} = r dt + \sigma dW_t, \quad S_0 = s_0 \quad (6.16)$$

といった稚拙な説明がなされることがままあるようである．ところが (6.16) 式を解く段になって，突然変節し「しかし，これの解は $S_t = s_0 \exp\{(r - \sigma^2/2)t + \sigma W_t\}$ であって，読者が予測されるような $s_0 \exp\{rt + \sigma W_t\}$ ではない」として煙に巻き「確率解析の世界は神秘的であり皆さんが思うような単純な世界ではない」と諭す．もちろんどこに錯誤があるのか我々は既に知っている伊藤 (Itô) 解析では

$$\frac{dS_t}{S_t} = d(\log S_t) - \frac{\sigma^2}{2}dt$$

であり，

$$\frac{dS_t}{S_t} = d(\log S_t)$$

ではない．しかしこれではいかにも不自然である．モデル (6.16) 式をいったんこのように表した以上，それは次の対称型 SDE

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma d_{1/2}W_t), \quad S_0 = s_0 \tag{6.17}$$

と同値とするのが自然である．実際の計算ではそのように対称積分解析に従いながら，表記の面では伊藤型 SDE(6.15) の別表記のつもりであった点に論理的混乱をきたした原因がある．

確率微積分，特に対称型確率解析に関するこのような誤解は珍しいことではなく，伊藤理論が工学・物理などに応用されだした初期の頃から頻繁に見られたことである．

例 6.5（余談——工学における雑音モデルの錯覚） 工学や物理学ではシステムの動的挙動を表すモデルとしてよく微分方程式を使う．それらはニュートン力学の法則や力の平衡条件など，何らかの根拠をもって導出されるものである．例えば，

(D) $$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0$$

がそのようなものであったとしよう．このようなシステムに雑音が混入した際のモデルとして次のランダムな微分方程式が，何らかの力学的考察や検討もなく全く安直に提示されたものである．

(S) $$\frac{d}{dt}X(t) = f(X(t)) + g(X(t))\frac{d}{dt}W_t, \quad X(0) = x_0$$

がそうした点には全くおかまいなく，ただ右辺最終項の意味づけのために援用されたのが伊藤理論であった．このように単なる類推以外は何の根拠もなく方

程式をでっち上げるやり方を当時（1970 年代）の日本では現象論的モデルの方法と称していた.

ところで白色雑音 dW_t/dt はエネルギーが無限であり，物理的に不可能な概念であったから，いきなり伊藤理論に寄りかかることを避けた良心的な工学者はこれを物理的に可能な近似量 $(d/dt)W_t^\alpha$，ただし W^α はブラウン運動の近似過程（$\alpha \to \infty$ のとき $W_t^\alpha \to W_t$）で滑らかな軌道を持つもの，で置きかえたランダムな方程式,

$$(\mathrm{S}_\alpha) \qquad \frac{d}{dt}X^\alpha(t) = f(X^\alpha(t)) + g(X^\alpha(t))\frac{d}{dt}W_t^\alpha, \quad X^\alpha(0) = x_0$$

を考え，方程式 (S) を近似方程式 (S_α) の $\alpha \to \infty$ における極限状態に対応するものとしてとらえようとした. (S_α) はランダムではあるが普通の常微分方程式であるから，係数 $f(x), g(x)$ に適当な滑らかさを仮定すれば解 X^α を持つことは自明である. ウォンとザカイ (Wong & Zakai)[52] はこのプログラムに従って研究を行い次の結果を得た；

解 X_t^α は $\alpha \to \infty$ で平均収束し，極限 $X(t) = \lim X^\alpha(t)$ は (S) の伊藤型モデル,

$$(\mathrm{SDE}) \qquad dX_t = f(X(t))dt + g(X(t))dW_t, \quad X_0 = x_0$$

の解ではなく次の SDE モデル,

$$(\mathrm{W+Z}) \qquad dX_t = \left\{ f(X(t)) + \frac{1}{2}gg'(X(t)) \right\} dt + g(X(t))dW_t, \quad X_0 = x_0$$

の解であることを示した. 言うまでもなく (W + Z) は次に示す (S) の対称積分モデル (SDE_s) と等価であるが，ウォンとザカイが上の結果を出した 1967 年頃はまだ対称積分の存在は一般に知られていなかった*1；

$$(\mathrm{SDE}_s) \qquad dX_t = f(X(t))dt + g(X(t))d_{1/2}W_t, \quad X_0 = x_0$$

---

*1 筆者の対称積分導入が 1969 年，ストラトノヴィッチ–フィスクの対称積分が知られ出したのもこのころである.

$X(t) = \lim X^\alpha(t)$ が (SDE) の解にならないことはごく簡単な例,

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_a^b W_s^\alpha dW_s^\alpha = \lim_{\alpha\to\infty}\frac{1}{2}\Big\{(W^\alpha(b))^2 - (W^\alpha(a))^2\Big\} \neq \int_a^b W_s dW_s$$

から明らかな事柄ではあるが，ウォンとザカイの結果は確率解析と本来の現象論的数学の健全な発展につながる画期的な発見であった．

例 6.6 (BSDE) 対称積分方程式の話題ではないが同質の事柄として，伊藤型 SDE を後ろ向き伊藤積分で解釈することも可能である．もちろん，この場合は初期値問題ではなくて次のような終端値問題を扱うことなる；

$$X_t = X_T(\omega) - \int_t^T a(s, X_s)ds - \int_t^T b(s, X_s)d_1 W_s \quad (0 \le t \le T) \quad (6.18)$$

ここに $X_T(\omega)$ は終端条件値であり，$\mathcal{F}_T$ とは独立な確率変数であればよい．このような SDE(6.18) を（伊藤型）BSDE といい，数理ファイナンスでも一定の役割を果たしている．

7 非因果的確率解析

次のような問題を考えてみよう．

例 7.1　ブラウン運動 W_t の関数 $f(t,\omega)$ が $f(t,\omega) = W_1(\omega)$ のような場合，確率積分 $\int_0^1 f(t,\omega)dW_t$ は可能であろうか？

$f(t,\omega)$ は因果的ではないから杓子定規に考えれば伊藤積分の対象にはならない．しかし伊藤積分を特殊な形のリーマン和[*1]の極限としてとらえる立場になれば，これは積分可能である．実際，区間 $[0,1]$ の分割 $\Delta = \{0 \leq t_1 < \cdots < t_n \leq 1\}$ に応じて，リーマン和を考えれば，

$$S(f;\Delta);=\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta_k W, \quad \Delta_k = W_{t_{k+1}} - W_{t_k}$$

$f(t) = W_1$ であるから，

$$S(f;\Delta) = W_1 \sum_{k=1}^{n} \Delta_k W = W_1^2$$

したがって，

$$\int_0^1 W_1 dW_t = W_1^2$$

となる．

ところで，$W_1 - W_t$ $(0 \leq t \leq 1)$ は未来情報 $\mathcal{F}_1^t = \sigma\{W_1 - W_s; t \leq s \leq 1\}$ に関して因果的（すなわち反因果的）であるから後ろ向き伊藤積分が可能で

[*1] 被積分関数の代表値として各小区間における左端点での値を採用するというリーマン和．

$I_2 = \int_0^1 (W_1 - W_t)dW_t$ が定義されることを既に第 4 章で見た．この後ろ向き積分と通常の積分 $I_1 = \int_0^1 W_t dW_t$ を同列に扱うことはできない．例えば，

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= \int_0^1 W_t dW_t + \int_0^1 (W_1 - W_t)dW_t = \int_0^1 \{(W_1 - W_t) + W_t\}dW_t \\ &= \int_0^1 W_1 dW_t \\ &= W_1^2 \qquad ?? \end{aligned} \tag{7.1}$$

などと計算することは許されない．実際，上式最右辺については伊藤積分（普通の，あるいは後ろ向きの）の性質より $E[I_1 + I_2] = 0$ であるが，最右辺の平均値は $E[W_1^2] = 1$ である．しかしこれでは伊藤積分は演算の整合性に欠けることになり，応用上でも支障をきたす．この難点は幸いにして，因果性の大前提を仮定せずに展開される非因果的確率積分論の導入によって整合的に解決されることになる．本章では筆者のこれまでの論文など印刷物に従いこの新しい確率解析について解説する．それゆえごく少数の補助的結果を除いて示される結果は全て筆者によるものである．

7.1 非因果的確率積分

因果性を仮定しない乱関数 $f(t,\omega) \in \mathbf{H}$ に対する確率積分 $\int_0^1 f(t,\omega)dW_t$ 導入の可能性について考えたい．

7.1.1 定 義 と 注 意

記号の煩雑さを避けるために扱う関数，乱関数は全て実数値であるとしておく．$\{\varphi_n(t)\}$ を（実ヒルベルト（Hirbert）空間）$L^2(0,1)$ の正規直交底とする，すなわち；

$$(\varphi_m, \varphi_n) := \int_0^1 \varphi_m(t)\varphi_n(t)dt = \delta_{m,n}$$

$(\cdot,\cdot)$ は $L(0,1)$ における内積を表し，$\delta_{m,n}$ はクロネッカー（Kronecher）のデルタである，すなわち；$\delta_{m,n} = 0$ $(m \neq n)$, $= 1$ $(m = n)$. 次のような形式的ランダム級数を考える．

$$T(f:\{\varphi\}) := \sum_{n=1}^{\infty}(f,\varphi_n)Z_n, \quad Z_n := (\varphi_n, \dot{W}) := \int_0^1 \varphi_n(t)dW_t \qquad (7.2)$$

W_t がブラウン運動である場合，$\{Z_n\}$ は各成分 Z_n が標準正規分布 $N(0,1)$ に従う，独立な確率変数列であることに注意しておく．

定義 7.1（S.Ogawa[25]） (1) 級数 $T(f:\{\varphi\})$ が確率収束するとき f は $\{\varphi_n\}$ に関して，区間 $[0,1]$ 上で確率積分可能である（あるいは簡単に，φ-可積分である）といい，級数 T の値を

$$T(f:\{\varphi\}) = \int_0^1 f(t,\omega)d_\varphi W_t$$

と記し，f の $\{\varphi\}$ に関する**非因果的確率積分** (noncausal stochastic integral) とよぶ．

(2) 区間 $[0,1]$ 内の任意の可測集合 $A \in [0,1]$ に対して，$\mathbf{1}_A(t)f(t,\omega)$ が (1) の意味で φ-可積分であるとき，f は A 上で φ- 可積分であるといい，次のように記すことにする；

$$\int_A f(t,\omega)d_\varphi W_t := \int_0^1 \mathbf{1}_A(t)f(t,\omega)d_\varphi W_t$$

ただし，$\mathbf{1}_A(t) = \begin{cases} 1 & (t \in A) \\ 0 & (t \notin A) \end{cases}$

この定義では被積分関数 f の因果性を必要としていないこと，また相方となる乱関数 W_t がブラウン運動（あるいは，マルチンゲール）であることすら前提としていないことに注意されたい．W_t の位置には $\mathbf{H}$ 級の任意の確率過程が入りうるし，さらには確率場（すなわち，多次元径数確率過程）も入りうるのである．これらの一般化については基本的結果の紹介が一通り終わった段階で再びふれることにする．

註 7.1 積分の値は一般に正規直交底 $\{\varphi\}$ の選び方に依存することも注意しておく．それどころか，一般にランダム級数 $T(f:\{\varphi_n\})$ は収束する場

合でも条件収束（絶対収束ではないこと）であるから，直交底 $\{\varphi_n\}$ の並び具合も収束性と値に影響を与える．例えば，$\{\varphi_n\}$ の並べ方を変えた直交底を $\{\psi_n\}$ とすれば，φ-可積分性が ψ-可積分性を保証するとは限らない．したがって直交底はその並べ方も込めて指定しなければならない．逆に f が全ての正規直交底に関して積分可能であり，積分値が直交底の選び方に無関係であれば，f は u 可積分 (universally integrable) であるという．

非因果的積分の理解にあたって次の結果は重要な鍵となる．

定理 7.1（伊藤—西尾の定理 [15]） $\{Z_n\}$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ で定義され，同一の標準正規分布 $N(0,1)$ に従う独立確率変数列とする．$L^2(0,1)$ における任意の正規直交底 $\{\varphi_n\}$ に対して，

$$W_n^{\varphi}(t,\omega) := \sum_{k=1}^{n} Z_k(\omega) \int_0^t \varphi(s)ds \tag{7.3}$$

で構成される乱関数列 $\{W_n^{\varphi}(t)\}$ は $n \to \infty$ とすれば，確率 1 で区間 $[0,1]$ 上でブラウン運動 $W_t(\omega)$，$(t,\omega) \in [0,1] \times \Omega$ に一様収束する；

$$P(\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,1]} |W(t,\omega) - W_n^{\varphi}(t,\omega)| = 0) = 1$$

例 7.2 (1) 任意の確率変数 $\Xi(\omega)$ は任意の $\{\varphi_n\}$ について可積分で，

$$\int_0^t \Xi(\omega) d_{\varphi} W(t) = \Xi(\omega) W_t$$

が成り立つ．

実際，$(\Xi, \varphi_k) = \Xi\tilde{\varphi}_k(1)$, ただし $\tilde{\varphi}_k(t) = \int_0^t \varphi_k(s)ds$ であるから，非因果的積分の定義と伊藤–西尾の定理（定理 7.1）より，

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \Xi d_{\varphi} W(s) &: = T(\Xi \mathbf{1}_{[0,t]}(\cdot) : \{\varphi_n\}) := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (\Xi \mathbf{1}_{[0,t]}, \varphi_k) Z_k \\
&= \lim_{n\to\infty} \Xi \sum_{k=1}^{n} Z_k \tilde{\varphi}_k(t) = \Xi \lim_{n\to\infty} W_n^{\varphi}(t) \\
&= \Xi W_t
\end{aligned}$$

となり結論を得る.

(2) 同様に W_t^n は任意の系 $\{\varphi_n\}$ について積分可能で次式が成り立つ.

$$\int_0^t W_s^n d_\varphi W(s) = \frac{1}{n+1} W_t^{n+1}$$

実際, W_t の級数展開式より,

$$W_t^n = \left[\sum_{k=1}^{\infty} Z_k \tilde{\varphi}_k(t)\right]^n$$

したがって,

$$\begin{aligned}
&T(W^n : \{\varphi\}) \\
&= \sum_{k_0=1}^{\infty} Z_{k_0} \sum_{k_1,k_2,\cdots k_n}^{\infty} Z_{k_1} Z_{k_2} \cdots Z_{k_n} \int_0^t \tilde{\varphi}_{k_1}(s) \times \cdots \times \tilde{\varphi}_{k_n}(s) \varphi_{k_0}(s) ds \\
&= \sum_{k_0,k_1,\cdots,k_n}^{\infty} Z_{k_0} Z_{k_1} \times \cdots \times Z_{k_n} \frac{1}{n+1} \prod_{i=0}^{n} \tilde{\varphi}_{k_i}(t) \\
&= \frac{1}{n+1} \left\{\sum_{k=0}^{\infty} Z_k \tilde{\varphi}_k(t)\right\}^{n+1} = \frac{1}{n+1} W_t^{n+1}
\end{aligned}$$

上の結果は非因果的積分が対称積分と深い関係を持つことを示している. これについては少し後で詳述する.

註 7.2 正規直交底 $\{\varphi_n\}$ に応じて式 (7.3) で構成された, ブラウン運動 W_t の近似関数 $W_n^\varphi(t)$ は微分可能な関数 $\int_0^t \varphi_k(s)ds$ の有限和であるから微分可能である. 丁寧に言えば, 見本関数は確率 1 で微分可能である. したがって, 任意の乱関数 f について, スティールチェス積分 $\int f(t)dW_n^\varphi(t)$ を考えることが許される.

$T(f : \{\varphi\})$ の第 n 部分和 T_n を考える ;

$$T_n := \sum_{k=1}^{n} (f, \varphi_k) \int_0^1 \varphi_k(s) dW_s$$

級数 T が（確率）収束するとは確率変数列 $\{T_n\}$ が $n \to \infty$ で（確率）収束するということである．ところで，

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} (f, \varphi_k) Z_k = \left(f, \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(\cdot) Z_k \right)$$

であるから，上に導入した $W_n^{\varphi}(t)$ を使えば，$T_n := \int_0^1 f(t,\omega) dW_n^{\varphi}(t)$ と表されることがわかり，次の結果が得られる．

命題 7.1 f が φ 可積分であるための必要十分条件は列 $\{T_n\}$ が確率収束することであり，$\{\varphi_n(x)\}$ に関する非因果的積分はその極限として表される；

$$\int_0^1 f(t,\omega) d_{\varphi} W(t) := \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(t,\omega) dW_n^{\varphi}(t)$$

註 7.3 $\{\varphi_n\}$ に対応して，

$$D_n^{\varphi}(s,t) := \sum_{k \le n} \varphi_k(s) \varphi_k(t)$$

とおけば，近似列 $W_n^{\varphi}(t)$ は次で表される；

$$W_n^{\varphi}(t) = \int_0^t dr \int_0^1 D_n^{\varphi}(s,r) dW_s$$

すなわち，

$$\int_0^1 f(t,\omega) dW_n^{\varphi}(t) = \int_0^1 \int_0^1 f(t,\omega) D_n^{\varphi}(s,t) dW_s dt$$

したがって，f が φ 可積分であるための必要十分条件は

$$^{\exists}\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \int_0^1 f(t,\omega) D_n^{\varphi}(s,t) dW_s dt \qquad (\text{確率収束})$$

である．

次の例は新しい積分がリーマン型積分でもあることを示している．

例 7.3　区間 $[0,1]$ 上の関数系 $\{H_{n,i}(t); n \geq 0, 0 \leq i \leq 2^n - 1\}$ で次で定義されるものをハール関数系 (Haar functions) という；

$$H_{0,0}(t) = 1$$
$$H_{n,i}(t) = 2^{\frac{n-1}{2}}\{\mathbf{1}_{I(n,i)}(t) - \mathbf{1}_{I(n,i+1/2)}(t)\}$$

ただし，$I(n,i) = [2^{-n}2i, 2^{-n)}(2i+1))$ である．ハール関数系は $L^2(0,1)$ の正規直交底になっている．これを積分の座標系 $\{\varphi_n\}$ にとることを考えてみる．ただし，次のように順序づけて考える；

$$T_n = (f,1)Z_{0,0} + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{2^{k-1}-1}(f, H_{k,i})Z_{k,i}$$

ここで，

$$Z_{k,i} = \int_0^1 H_{k,i}(t)dW_t \quad (k \geq 1)$$

であり，特に

$$Z_{0,0} = (H_{0,0}, \frac{d}{dt}W_t) = W_1$$

である．煩雑なので詳細は省略するが上式左辺をさらに整理すると次の結果が得られる；

命題 7.1 (S.Ogawa[31])　級数 T の第 n 部分和は次で表される．

$$T_n = \sum_{i=0}^{2^n-1}\left[2^n\int_{2^{-n}i}^{2^{-n}(i+1)} f(t,\omega)dt\right]\{W(2^{-n}(i+1) - W(2^{-n}i)\}$$

これは区間 $[0,1]$ を 2^n 等分した分割 $\Delta_n = \{2^{-n}i\,; 0 \leq i \leq 2^n - 1\}$ に対応するリーマン和であり，特に分割の各小区間 $[2^{-n}i, 2^{-n}(i+1))$ における微積分関数 f の代表値として f のこの区間における**平均値**，$2^n\int_{2^{-n}i}^{2^{-n}(i+1)} f(t,\omega)dt$ を採用したものになっている．

あるいは既に 3.6.3 節でふれたことでもあるが，次のようにも言える；

命題 7.2 ハール関数系に対応する近似列 $W_n^H(t)$ は次のように表される.

$$\begin{cases} W_n^H(t) = W(2^{-n}i) + \dfrac{W(2^{-n}(i+1)) - W(2^{-n}i)}{2^{-n}}(t - 2^{-n}i) \\ t \in [2^{-n}i, 2^{-n}(i+1)) \end{cases} \tag{7.4}$$

これはブラウン運動 W_t を，分割 Δ_n 上で折れ線近似（**コーシーの折れ線近似**ともいう）したものにほかならない.

7.1.2 基本的結果

非因果的積分の存在理由はまず因果的積分との関係に見いだされなければならない. 逆説ではなく，新しい概念が従来の理論をどういう意味で継承しているのかは重要な事柄である. 計算機ソフトのバージョンが更新されるのは勝手だが，旧バージョンの蓄積が継承されないようでは単に迷惑でもある. ここでは非因果的積分の基本的性質の中で，特に従来の因果的理論に関わる部分について紹介する.

概念の復習から始める. 因果的乱関数 f が（ブラウン運動に関する）半マルチンゲールであるとは，$f(t,\omega), t \in [0,1]$ は次のように表現されることであった；

$$df = da(t,\omega) + b(t,\omega)dW_t \tag{7.5}$$

ここに $a(t,\omega), b(t,\omega)$ は $\mathcal{M}_2$ 級の因果的乱関数であるが，特に $a(t,\omega)$ は見本関数が有界変動である. このような f については対称積分 $\int_0^1 f d_{1/2} W_t$ が定義されたことを思い出されたい. ここで $L^2(0,1)$ の正規直交底 $\{\varphi_n\}$ に関する新しい概念を導入しておく.

定義 7.2 正規直交底 $\{\varphi_n\}$ は次の条件を満たすとき正則基底 (regular basis) であるということにする.

$$\sup_n ||u_n||_{L^2} < \infty, \quad u_n(t) := \sum_{k \le n} \varphi_k(t)\tilde{\varphi}_k(t) \tag{7.6}$$

ここで，$\tilde{\varphi}_k(t) = \displaystyle\int_0^t \varphi_k(s)ds$.

例 7.4 三角関数系 $\{1, \sqrt{2}\sin 2\pi nt, \sqrt{2}\cos 2\pi nt, (n \geq 1)\}$ やハール関数系 $\{H_{n,i}(t)\}$ は正則基底である．特に，ハール関数系については，

$$u_n(t) := \sum_{k\leq n}\sum_{i\leq 2^k-1} H_{k,i}(t)\tilde{H}_{k,i}(t) = T^n x$$

と表される，ただし T は $Tx = 2x \ (\mathrm{mod} = 1)$ で与えられる区間 $[0,1)$ 上の変換である．正則でない正規直交底の存在はごく最近になって示された [17]．

定理 7.2 (S.Ogawa[31]) (1) 全ての半マルチンゲール f が正規直交底 $\{\varphi\}$ について φ- 可積分となるための必要十分条件は $\{\varphi_n\}$ が正則基底であることであり，このとき f の φ に関する非因果的積分 $\int_0^1 f d_\varphi W_t$ は $\{\varphi_n\}$ によらず全て f の対称積分に等しくなる．すなわち，

$$\int_0^1 f d_\varphi W_t = \int_0^1 f d_{1/2} W_t, \quad {}^\forall\{\varphi\} = \text{正則基底}. \tag{7.7}$$

このような場合は座標系 $\{\varphi_n\}$ を指定する必要がないので，非因果的積分を $\int_0^1 f\, d_* W_t$ と表すことがある．

(2) 半マルチンゲール f の分解式 (7.5) において，因果的係数 $b(t,\omega)$ が再び同様な半マルチンゲールであるならば，f は u-可積分である．すなわち任意の正規直交底に関して非因果的積分可能となり，この場合も積分値は対称積分と一致する．

すなわち非因果的積分は対称積分の自然な拡張になっている．重要な注意を 2, 3 付け加えよう．

註 7.4 ほぼ自明な拡張として，上の定理における**半マルチンゲール**は**擬マルチンゲール**で置きかえることができる．ただし $f \in \mathbf{H}$ が擬マルチンゲールであるとは f の分解式 (7.5) に現れる係数 $a(t,\omega)$ が因果的であることを仮定しないものをいう．これに応じて，関係式 (7.7) は次のように修正される；

$$\int_0^1 f d_\varphi W_t = \left\{W_1 a(1,\omega) - \int_0^1 W_t da(t,\omega) + \frac{1}{2}\int_0^1 b(t,\omega)dt\right\} + \int_0^1 b(t,\omega)dW_t$$

註 7.5 (W-可微分関数の場合) f がブラウン運動に関して微分可能である場合（W-可微分関数）は，ハール関数系に関して非因果的積分可能であることがわかっている[30,31]が，上の定理 (7.2) のような一般的な結果はまだ知られていない．

正則基底に関する積分については収束の様相もある程度のことがわかる．

命題 7.2 半マルチンゲール f の係数 $b(t,\omega)$ がクラス $L^4([0,1]\times\Omega)$ の関数であれば，部分区間 $[0,t]\subset[0,1]$ における非因果的積分 $\int_0^t f(s)\, d_*W_s$ は $t\in[0,1]$ について一様に確率収束する．

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in[0,1]}\left|\int_0^t f(s)dW_s^{\varphi}-\int_0^t f(s)d_*W_s\right|=0 \quad (\text{確率収束})$$

7.1.3 後ろ向き対称積分との関係について

乱関数 $f(t,\omega)$ の可測性について，ブラウン運動 W_t が生成する自然な情報系列 $\{\mathcal{F}_t, t\geq 0\}$ を考え，各 $t>0$ ごとに $\mathcal{F}_t$ 可測であれば因果的といい，これに対して，未来情報の系列 $\{\mathcal{F}_T^t,\ 0\leq t\leq T\}$ ただし，$\mathcal{F}_T^t; = \sigma\{W_T-W_s; t\leq s\leq T\}$ について可測であれば反因果的 (anti-causal) といった．因果的な乱関数については伊藤積分 $\mathcal{I}_0$ が，また反因果的なものについては後ろ向き伊藤積分 (backward Itô integral) $\mathcal{I}_1$ が定義できることを既に見た．しかしいずれの場合にせよ，対称積分 $\mathcal{I}_{1/2}$ そのものは同一の対称的リーマン和，

$$S_n(f):=\sum_{k\leq n} f\left(\frac{t_k+t_{k+1}}{2}\right)\Delta_k W, \qquad \Delta_k W=W(t_{k+1})-W(t_k)$$

の確率収束極限としてとらえられる．したがって，非因果的積分もこの特徴を継承し，W 可微分性（あるいは，後ろ向き W 可微分性）を持つ被積分関数については，その因果性の向きを気にすることなく同一の手順で定義され，結果は可測性に対応したしかるべき対称積分に一致するのである．

例 7.5 最初に挙げた非因果的計算例を再考してみよう．

$$
\begin{aligned}
I_1 + I_2 &= \int_0^1 W_t dW_t + \int_0^1 (W_1 - W_t) dW_t \\
&= \int_0^1 \{(W_1 - W_t) + W_t\} dW_t = \int_0^1 W_1 dW_t \\
&= W_1^2 \quad ??
\end{aligned}
$$

最左辺の積分は当然非因果的積分でなければならないから，それで置きかえてみると；第 1 項は因果的対称積分であり，第 2 項は反因果的対称積分である．したがって定理 4.5 と定理 7.2 より，

$$
\int_0^1 W_t d_* W_t = \int_0^1 W_t d_1 W_t - \frac{1}{2} \int_0^1 dt
$$

一方，第 2 項についても同様に，

$$
\int_0^1 (W_1 - W_t) d_* W_t = \int_0^1 (W_1 - W_t) d_1 W_t + \frac{1}{2} \int_0^1 dt
$$

よって，

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 W_t d_* W_t + \int_0^1 (W_1 - W_t) d_* W_t \\
&\quad = \left\{ \int_0^1 W_t d_1 W_t - \frac{1}{2} \int_0^1 dt \right\} + \left\{ \int_0^1 (W_1 - W_t) d_1 W_t + \frac{1}{2} \int_0^1 dt \right\} \\
&\quad = \int_0^1 W_1 d_1 W_t = \int_0^1 W_1 d_* W_t = W_1^2
\end{aligned}
$$

となり，当然のことながらつじつまがあう．

註 7.6 被積分関数が因果的か非因果的であるかを問わず，確率積分を同じ型のリーマン積分でとっており，被積分関数が可積分であれば次の式は成り立つ．

$$
\int_T (f + g)\ d_\theta W_t = \int_T f\ d_\theta W_t + \int_T g\ d_\theta W_t
$$

7.2 非因果的問題

非因果的確率積分の導入は従来の確率微分方程式をも非因果的解析の対象としてとらえることを可能にする．

7.2.1 非因果的SDE

前章で考察した次の対称型 SDE の初期値問題 (6.13)

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)d_{1/2}W_t, \quad X_0 = x_0 \tag{7.8}$$

を異なった視点すなわち，必ずしも因果的であることを仮定しない解を求める問題として考えてみる．言いかえれば，次のような非因果的 SDE として再考してみる；

$$d\tilde{X}_t = a(t, \tilde{X}_t)dt + b(t, \tilde{X}_t)d_*W_t, \quad \tilde{X}_0 = x_0 \tag{7.9}$$

ここで，$\int d_*W_t$ は任意の正則基底 $\{\varphi_n\}$ に関する非因果的積分項である．係数 $a(\cdot), b(\cdot)$ が十分に滑らかであれば，初期値問題 (6.13) は一意的な強解を持つことは既に見たところであるが，非因果的積分の基本定理 7.2 より直ちに，この問題 (7.8) の解 X_t は同時に非因果的問題 (7.9) の解になることがわかる．そこで状況をもう少し一般的にして，初期値 $\tilde{X}_0(\omega)$ が定数 x_0 ではなくて任意の確率変数 $\Xi(\omega)$ である場合を考えてみる．

$$d\tilde{X}_t = a(t, \tilde{X}_t)dt + b(t, \tilde{X}_t)d_*W_t, \quad \tilde{X}_0 = \Xi(\omega) \tag{7.10}$$

この非因果的初期値問題の解の存在を調べる．まず因果的問題 (7.8) 式の一意的解を初期条件を明示して $X_t(\omega; x_0)$ と表すことにすれば，係数の滑らかさの仮定の下では，これが x_0 に関して確率 1 で連続であることがわかる．実は，

定理 7.3 (S.Ogawa[28]) $X_t(\omega; x_0)$ とランダム初期値 $\Xi(\omega)$ との合成関数を考えれば，

$$\tilde{X}_t(\omega) := X_t(\omega; \Xi(\omega)), \quad t \in [0, 1]$$

$\tilde{X}_t(\omega)$ は $\mathbf{H}$ 級の乱関数であるが，非因果的問題 (7.10) の解にもなっている

証明 [概略] 正則基底 $\{\varphi_n\}$ を任意に一つ固定し，前の議論に倣い W_t の $\{\varphi_n\}$ に関する近似過程 $W_n^{\varphi}(t)$ と因果的解 $X(t, \omega; x_0)$ を使って近似列 $X_n(t, \omega; x_0)$ を構成する．

$$X_n(t,\omega;x_0) := x_0 + \int_0^t a(s, X_s(\omega;x_0))ds + \int_0^t b(s, X_s(\omega;x_0))dW_n^{\varphi}(s) \tag{7.11}$$

右辺第 2 項の積分は確率積分ではなく，ランダム径数 $\omega \in \Omega$ ごとに意味のあるスティールチェス積分であるから，上式 (7.11) 両辺において x_0 をそのまま $\Xi(\omega)$ で置きかえることができる．すなわち，

$$X_n(t,\omega;\Xi(\omega)) := x_0 + \int_0^t a(s, X_s(\omega;\Xi(\omega)))ds + \int_0^t b(s, X_s(\omega;\Xi(\omega)))dW_n^{\varphi}(s). \tag{7.12}$$

ところで X_n の定義式 (7.11) において，$n \to \infty$ とすれば，対称積分の性質より $X_n(t,\omega;x_0)$ は x_0 について広義一様に $X_t(\omega;x_0)$ に確率収束することが示される．よって，列 $X_n(t,\omega;\Xi(\omega))$ も収束し，$\tilde{X}(t,\omega) := X(t,\omega;\Xi(\omega)) = \lim_{n\to\infty} X_n(t,\omega;\Xi(\omega))$ であったから，等式 (7.12) より，

$$\tilde{X}(t,\omega) := \Xi(\omega) + \int_0^t a(s,\tilde{X}(s,\omega))ds + \lim_{n\to\infty}\int_0^t b(s,\tilde{X}(s,\omega))dW_n^{\varphi}(s)$$

を得るが，右辺第 2 項の極限は非因果的積分の定義より

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t b(s,\tilde{X}(s,\omega))dW_n^{\varphi}(s) = \int_0^t b(s,\tilde{X}(s,\omega))d_{\varphi}W_s$$

よって $\tilde{X}(t,\omega)$ が非因果的初期値問題 (7.10) の解であることが確かめられた．

□

この議論はもっと一般の非因果的 SDE についても応用ができる．例えば，$a(t,x,y), b(t,x,y)$ を十分に滑らかで有界かつ有界な導関数を持つ係数とする．$\Xi(\omega), \Theta(\omega), Z(\omega)$ を任意の確率変数とし，次の非因果的初期値問題を考える

$$d\tilde{X}_t = a(t,\tilde{X}_t,\Theta)dt + b(t,\tilde{X}_t,Z)d_*W_t, \quad \tilde{X}_0(\omega) = \Xi(\omega) \tag{7.13}$$

これに対応して，定数 x_0, θ, ζ を任意に固定し次の対称型因果的問題を考える．

$$dX_t = a(t,X_t,\theta)dt + b(t,X_t,\zeta)d_{1/2}W_t, \quad X_0(\omega) = x_0 \tag{7.14}$$

これの解（一意的な因果的解）を $X_t(\omega;x_0,\theta,\zeta)$ とし，合成関数を，

$$\tilde{X}_t(\omega) := X_t(\omega; \Xi(\omega), \Theta(\omega), Z(\omega)) \qquad (7.15)$$

とおけば，証明は省略するが前の定理と同様にしてこの $\tilde{X}_t$ が非因果的 SDE の非因果的初期値問題 (7.13) の解であることが示される；

定理 7.4 (S.Ogawa[43]) 係数 $a(\cdot), b(\cdot)$ が十分に滑らかで全ての導関数が有界であれば，(7.15) 式で導入された合成関数 $\tilde{X}(t,\omega)$ は (7.13) 式の解になる．

7.2.2 非因果的伊藤公式

前項（定理 7.3, 定理 7.4）で構成した非因果的解 $\tilde{X}_t$ は次の性質を持つ．

定理 7.5 (S.Ogawa[43]) 十分滑らかで，(x,y) について有界な導関数を持つ任意の $F(t,x,y)$, $(t \geq 0, (x,y) \in \mathbf{R}^2)$ と任意の確率変数 $H(\omega)$ について次式が成り立つ；

$$\begin{aligned} dF(t, \tilde{X}_t, H(\omega)) &= \{\partial_t F + \partial_x F \cdot a(t, \tilde{X}_t, \Theta(\omega))\}dt \\ &\quad + \partial_x F v \cdot b(t, \tilde{X}_t, Z(\omega)) d_* W_t \quad (0 \leq t \leq T) \end{aligned} \qquad (7.16)$$

証明は省略する．

註 7.7 非因果的伊藤公式寸景；最初の非因果的伊藤公式は 1984 年，筆者（小川）と関口健氏の共同研究により，下記の形で示された[29]．当時は何の反響もなく，以来そのまま放置されていたが，ごく最近になって筆者により上の形（定理 7.5）に拡張された．

命題 7.3 (Ogawa – Sekiguchi[29]) 定理 (7.3) で構成された非因果的初期値問題 (7.10) の解 $\tilde{X}_t$ は次の非因果的伊藤公式を満たす；

$$dF(t, \tilde{X}_t) = \{\partial_t F + \partial_x F \cdot a(t, \tilde{X}_t)\}dt + \partial_x F v \cdot b(t, \tilde{X}_t) d_* W_t \quad (0 \leq t \leq T) \qquad (7.17)$$

上の形の非因果的伊藤公式 (7.17) を満たすような解を正則解ということにする．
次は非因果的解の一意性についての結果である．

定理 7.6　非因果的初期値問題 (7.10) において条件, $b(\cdot) > 0$ (あるいは $b(\cdot) < 0$) が満たされる場合，合成関数として構成された解 $\tilde{X}_t$ は唯一の正則解である．

証明　[概略] $B(t,x) = \int_0^x dy/b(t,y)$ で定まる狭義単調関数 $B(t,x)$ と正則解 $\tilde{X}_t = X(t,\omega;\Xi(\omega))$ を組み合わせた乱関数，$Y_t := B(t,\tilde{X}_t)$ に非因果的伊藤公式を適用すれば，次の方程式が得られる．

$$dY_t = \left\{ B_t' + \frac{a}{b} - \frac{b_x'}{2b^2} \right\}(t,\tilde{X}_t)dt + dW_t$$

ここに, $B_t' = \partial_t B(t,x)$, $b_x' = \partial_x b(t,x)$ である．自明な関係式 $\tilde{X}_t = B^{-1}(t,Y_t)$ ($B^{-1} = B(t,\cdot)$ の x についての逆関数) を使って Y_t について整理すれば,

$$dY_t = \tilde{B}(t,Y_t)dt + dW_t$$

の形に表されることがわかる．ただし，$\tilde{B}(t,x)$ は (t,x) について連続，特に x についてリプシッツ連続な関数である．したがって解 Y_t の一意的存在が示される．Y_t がわかれば $\tilde{X}_t$ も一意的に $\tilde{X}_t = B^{-1}(t,Y_t)$ と表されるから，これより結論が得られる．　□

例 7.6　非因果的ブラック–ショールズ方程式を考えてみる．

$$dS_t = S_t\left\{ \left(r(\omega) - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt + \sigma d_* W_t \right\} \qquad (0 \le t \le 1),\ S_0 = s_0 \quad (7.18)$$

ここで, $\sigma =$ 定数であり, $r(\omega)$ は $\mathcal{F}_1$-可測な確率変数とする．$r(\omega) = r(=$ 定数$)$ ならば通常のブラック–ショールズモデルであることに注意しておく．
容易にわかるように，次の非因果的乱関数

$$S_t = s_0 \exp\left\{ \left(r(\omega) - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right\}$$

は正則解であり，したがって方程式 (7.18) の一意的な正則解であることがわかる．

7.2.3 フレドホルム型確率積分方程式

非因果的問題は特別に異質なものではない．端的に言えば乱関数の径数 t が**時間**から**位置** $x \in \mathbf{R}^p$, $(p \geq 1)$ を表すものになれば因果性の問題が起こる．因果律とは 1 次元的概念であるからである．したがって一般に確率微積分方程式の境界値問題や多次元径数の乱関数（確率場）に関する確率積分方程式は，この理由により非因果的確率解析の導入まで正当な問題として扱われなかった．

もう少し具体的に見るために次のような問題について考えよう．

$$\begin{cases} \left[\dfrac{d}{dt}p(t,\omega)\dfrac{d}{dt}+q(t,\omega)\right]X(t,\omega)=X(t,\omega)\dfrac{d}{dt}Z(t,\omega)+h(t,\omega) \\ X(0,\omega)=x_0,\ X(1,\omega)=x_1 \quad (0 \leq t \leq 1) \end{cases} \tag{7.19}$$

ここに，$p(t,\omega)$, $q(t,\omega)$, $h(t,\omega)$, $Z(t,\omega)$ $(\omega \in \Omega)$ は適当な確率空間 (Ω, F, P) 上の実数値乱関数であり，特に $Z(\cdot,\omega)$ としては，ブラウン運動や分数ブラウン運動 (fractional Brownian motion, 例えば 文献 10)) を想定している．

微分作用素 $[d/dtp(t)d/dt+q(t)]$ と指定された境界条件に対応するグリーン (Green) 関数 $g(t,s,\omega)$ を用いて，古典解析におけると同様に，問題 (7.19) 式を（形式的に）積分方程式に書きかえれば次のような フレドホルム (Fredholm) 型方程式になる；

$$X(t,\omega)=\int_0^1 g(t,s,\omega)X(s)dZ(s)+f(t,\omega) \tag{7.20}$$

ここに， $f(t,\omega)=\displaystyle\int_0^1 g(t,s,\omega)h(s,\omega)ds.$

確率積分の項を非因果的積分の意味でとることにすれば，(形式的) 問題 (7.19) との関係は別として，方程式 (7.20) 自体は具体的に意味のあるものとなる．これをもう少し一般化して次のような形の積分方程式にたどり着く．

$$\begin{aligned} X(t,\omega)=f(t,\omega)+\lambda\int_0^1 K(t,s,\omega)X(s,\omega)dZ(s) \\ +\beta\int_0^1 L(t,s,\omega)X(s,\omega)ds \end{aligned} \tag{7.21}$$

註 7.8 方程式 (7.21) と (7.19) のような境界値問題との関係については文献 32) を見られたい．

話を進めるために 1 次元径数の場合から出発したが，多次元径数の方程式に対する境界値問題も次のような式 (7.22) の形の積分方程式に帰着することを注意しておこう．

$$
\begin{aligned}
X(t,\omega) &= f(t,\omega) + \lambda \iint_{[0,1]^d} K(t,s,\omega)X(s,\omega)d_\phi Z(s) \\
&\quad + \beta \iint_{[0,1]^d} L(t,s,\omega)X(s,\omega)ds
\end{aligned}
\tag{7.22}
$$

ここで $X(t), Z(t), f(t)$ $(t \in [0,1]^d)$ は d 次元径数乱関数 (確率場) であり，駆動力である $Z(t)$ としては 2 乗可積分であればどのようなものでも対象になりえるが，数理科学への応用面では例えば，ブラウン運動 W_t の 2 次元径数版である**ブラウン敷布**（Brownian sheet）のような確率場が想定される．このような確率場に対する確率積分方程式 (7.21),(7.22) の解の存在や一意性，数値近似解構成などの基本的問題に関する筆者の結果とについては文献 32,34,35) を参照されたい．

7.3 ノート——SDE と因果律

従来の（因果的）確率解析に付随する原理的問題点を SDE 理論との関連で見ておきたい．

確率微分方程式はその働きを単純に述べるならば，白色ガウス雑音 $\dot{W}_t = dW_t/dt$ のように基本的な乱関数を別の乱関数 X_t に変換する機構である．前者を**入力**，後者を**出力**と見なせば，確率微分方程式はランダムな環境下での力学系（あるいは，システム）の挙動を表現する数学的素材であり，その理論はそうした現象を扱う数学的枠組を提供するものとして受け入れられた．そうした環境を背景に，SDE の理論はいわゆる（伊藤）確率解析として数理科学に広い応用分野を持つ理論に発展してきた．すなわち，SDE の概念はそのような確率力学的的現象を記述する手段としての期待を担って登場したはずであった．しかしながら SDE の理論はそうした応用的世界の期待には無頓着に，あくまでも「純粋」数学理論として発展したきたという印象が強い．それゆえ，応用面の視点あるいは物理的感覚から見ればいろいろと扱いにくい面があることも早

い時点から指摘されてきた．理由を二つほど挙げてみる；

(1) まず確率（微積分）解析においては古典解析における諸公式がそのままの形式では成立しない．これは応用する側からすれば「慣れればいい」と言って済む問題ではない．このことは，この確率解析の用語に従う限り，確率力学系においては ニュートン力学の諸形式が少なくともそのままの形では成立しないことを示しており，したがって，この理論を借用する側はそれが提供する新しい言語がランダム現象を表現するのに，どの程度に適切なものであるか否かを各々の応用分野における基準に従って検討しなければならない（のであるが，残念ながらこの問題が諸分野においてそれほど意識されたということはなかったのではないか？）．実際この懸念の正当性はワンとザカイ [52] の，SDE の物理的に可能な近似に関する仕事，によって明らかにされた．ところで，古典解析における形式をできるだけ保存する枠組みとして提出されたのが対称確率積分（ストラトノヴィッチ–フィスク積分，Ogawa[22] の $\mathcal{I}_{1/2}$ 積分の総称）*2 であるが，ここにおいて新たに現れたのが次の**因果性**の問題である．

(2) すなわち，従来の確率解析では対象となりうる乱関数は，出発点である乱関数の履歴に関して因果的（あるいは反因果的）であるものに限られており，そしてこの制限は古典解析並の形式を保存するに際して少なからず障害となる．筆者がこの問題点に最初に遭遇したのは確率偏微分方程式の研究 (ブラウン粒子方程式 [24, 33]) においてであったが，これを確率解析における問題点としてとらえていたのは，1980 年代後半に至るまで筆者をはじめとして旧ソ連の研究者などごく少数であった． さて，因果性の束縛が実際に障害となりえることは，例えば多次元径数を持つ乱関数を対象とする確率解析（stochastic calculus）を構築しようとすれば直ちに明らかになる．歴史的に観ればそもそも確率微分方程式は，ランジュバン（Langevin）方程式をはじめとして，その当初から拡散過程という非可逆な（すなわち因果的な）熱力学的現象をとらえるモデルとして現れた経緯があり，そしてそうした世界では**因果性**の条件は当然満たされているものであるため**因果性が解析にもたらす制限**などは幸いにして問題となりえなかったというと

---

*2 昨今は，往々にして Stratonovich 積分という雑な呼称でよばれる傾向がある．

ころであろう．ところが伊藤理論の目覚ましい成功のあと，SDEはランダムな外乱の下にある力学系（あるいは何らかのシステム）に対する数学モデルであることが無意識的に期待された時点で，ニュートン力学と熱力学(因果性）との折り合いという古典的問題と共に**因果性**の問題が再浮上せざるをえなくなってきたのである．

8

数値解法入門

確率微分方程式で記述される現象の数値シミュレーションや解 X_t の汎関数の数値的評価は応用面において重要な課題となるが，そのためには確率微分方程式の数値（近似）解を構成することが必要になる．ここでは SDE の数値解法について基本のところを解説しておく．

8.1 SDE の数値解法と離散化モデル

確率過程 X_t についての確率微分方程式，

$$\begin{cases} dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t \quad (0 < t \leq T) \\ X_0 = x_0 \end{cases} \tag{8.1}$$

の数値近似解を求めるとはどういうことであるか，またその具体的手法にはどのようなものがあるかについて考える．ここに，$W_t(\omega)$, $(t \geq 0)$, $\omega \in \Omega$ は適当な確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ で定義されたブラウン運動である．ごく一般的設定として W_t がマルチンゲールである場合も考察対象でなければならないが，現状では後で述べる数値化の理論と技術が十分でないことを注意しておく．

8.1.1 近 似 の 意 味

まず「SDE の数値解法とは何をするものか」という基本的なところの確認から始めよう．常微分方程式（以下略して **ODE** [*1]と称する）の数値解法とは基本変数 "t" の前もって定められた点 $\{t_i, 1 \leq i \leq N\}$ における真の解 $x(t)$ の近似値 $\{\overline{x}(t_i)\}$ を求める手順のことである．例えば最も簡単なオイラー（Euler）

[*1] ordinary differential equation の略である．

法を直接的に模倣すれば，SDE の初期値問題 (8.1) の解 (の特定点 t_k における値)$X(t_k)$ の数値近似値 (?) $\bar{x}(t_k)$ を求める手順として次のような算法を思いつくであろう；

$$\begin{cases} \bar{x}(t_{k+1}) = \bar{x}(t_k) + a(t_k, \bar{x}(t_k))\Delta_k t + b(t_k, \bar{x}(t_k))\xi_k & (k \geq 0) \\ \bar{x}(t_0) \quad = x_0 \quad (t_0 = 0) \end{cases} \tag{8.2}$$

ただし，$\Delta_k t = t_{k+1} - t_k$ また $\xi_k (k \geq 0)$ はランダムな量 $W(t_{k+1}) - W(t_k)$ の実現値と見なされる数，いわゆる**乱数**であり，今の場合は正規分布 $N(0, \Delta_k t)$ に従う乱数である。しかしながら，この算法で求められる数値の組 $\{\bar{x}(t_k), 0 \leq k \leq n\}$ は一体何を表しているのだろうか，真の解 X_t とはどのような関係があるのだろうか？　ODE の数値解法に比べて SDE の数値解法の外観はそれほど明解ではない．SDE と ODE との間には本質的な相違点があるからである，すなわち；

(d1)　ODE の解が（実数値）関数であるのに対して SDE のそれは確率過程であること．

(d2)　ODE では基本変数は "t" のみであるが，SDE では "t" と "M_t" の二つあること．

相違点 (d1) は当たり前の事柄であるがその認識は重要である．すなわち，数値解法は計算機によって現実に実行されるものであり，したがって，数値解法が提供するものはあくまでも数値の集合にすぎず確率変数でありえない．SDE の解は既にどこかで設定された確率空間の上で構築されていなければならないが，近似として得られる数値の集合に最初からそのような受け皿が用意されているわけではない．SDE の数値近似理論は次のような前提の下で展開される：

[基本仮定]： 基礎になる確率変量 (今の場合は M と確率変数 ξ) は適当な確率空間上に定義されており，それら，特にマルチンゲール M_t の増分 $\Delta M = M_t - M_s$ とその汎関数の任意の大きさの標本が乱数により供給されること．

相違点 (d2) は 近似解（SDE に対しては近似過程）を構成する離散モデルの導出の仕方が SDE と ODE とでは大きく異なるものになることを示唆してい

る．すなわち，確率解析の登場である．

8.1.2 数値解法の手順

SDE (8.1) における確率的要素は，マルチンゲール項と初期データとしての確率変数 $\xi(\omega)$ であり，その解はこれら基本的確率変量の関数である．数値解法で与えられる具体的数値の集合は，上の仮定中に述べられた仮想的確率空間上で構成される SDE の近似解という確率変量の実現値であると理解されなければならない．大数の法則が教えるように，十分な大きさの標本が得られたときに，問題としている確率変量の統計的諸性質に関する情報が引き出されるはずである．言いかえれば，SDE の数値解法は次の 2 段階の操作から構成されている：

(1) **離散化:** 変数 t について離散化したモデルの導入とそれに基づく離散的近似過程の構築.

(2) **数値化:** 上の段階で確立された近似方式において，基本的確率変量に由来する部分をしかるべき**乱数**で置きかえ，時間ステップに沿って段階的に数値近似解を構成する.

ここでは議論の主対象を以下のようなブラウン運動によって駆動される Itô 型 SDE に対する初期値問題の数値解法に限定する．既にふれたように，その理由はブラウン運動以外の一般的マルチンゲールを駆動力とするような場合に対する数値化の部分が未開拓の状態にあるからである．

$$\begin{cases} dX_t^i = a^i(t, X_t)dt + \displaystyle\sum_{j=1}^{m} b_j^i(t, X_t)dW_t^j \qquad (1 \le i \le d) \\ X_0^i = \xi^i(\omega) \qquad (1 \le i \le d) \end{cases} \tag{8.3}$$

ここに, $X_t = {}^t(X_t^1, X_t^2, \cdots, X_t^d)$ は, R^d-値確率過程, $W_t = {}^t(W_t^1, W_t^2, \cdots, W_t^m)$ は m 次元標準ブラウン運動で初期値 $\xi^i(\omega)$ と共に, 適当な確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ の上で与えられているものとする.

註 8.1 変数 $X_t = {}^t(X_t^1, X_t^2, \cdots, X_t^d)$ に 0 番目の成分として，$X_t^0 = t$ を

付け加え，$a^0(t,X_t)=1$，$b_j^0=0$ ($\forall j$) と約束すれば，上の SDE は新しい変数 $X_t' = {}^t(X_t^0, X_t^1, \cdots, X_t^d)$ について右辺の係数 a^i, b_j^i に「時間」t を陽に含まない形の SDE に書き直すことができる．したがって，最初からそのような場合を扱うことにする．また議論を不必要に複雑にするのを避けるため，本節を通じて，係数 $a^i(x)$, $b_j^i(x)$ ($x \in R^d$) は全て十分に滑らかなものであると仮定しておく．

8.1.3　離散化モデル

常微分方程式（以下，ODE と略記する）の場合と同様に，SDE の数値近似解も離散化された近似モデルから構成される．

時間区間 $[0,T]$ において，離散化の土台となる適当な分割 $\Delta = \{t_i\}$：$0 = t_0 < t_1 < t_2 \cdots < t_N = T$ （N は区間 $[0,T]$ の分割数)，が定められているとしよう (以下大抵の議論では分割が等分割，すなわち，$t_k = k \cdot \Delta t$, $\Delta t = T/N$, であると想定しても支障はない)．さて離散化の目的は，各分割点 t_i における真の解 X_{t_i} の近似値（以下 $\overline{X}_i$ と記す）をそれ以前の時点 t_j における近似値 $\overline{X}_j$, $(i-k_0 \le j \le i-1)$ と，ブラウン運動 W_t の区間 $[t_j, t_{j+1}]$ における部分 $W_{[j,j+1]}$, $(i-k_0 \le j \le i-1)$ の汎関数として，i について順次決定していく以下のような手順 $R(\cdot)$ を与えることである．

$$R(\overline{X}_i, \overline{X}_j, W_{[j,j+1]}\ ;\ i-k_0 \le j \le i-1) = 0 \tag{8.4}$$

通常 $W_{[j,j+1]}$ は，その区間上の増分 $\Delta_i W = {}^t(\Delta_i W^1, \cdots, \Delta_i W^d)$, $\Delta_i W^k = W_{t_{i+1}}^k - W_{t_i}^k$ や，多重ウィーナー積分項が該当する (8.2 節の stochastic Taylor 展開の項を参照)．ODE の数値解法におけると同様に，上の公式 (8.4) が $\overline{X}_n = \cdots$ の形で陽的に表されている場合は**陽的公式** (explicite formula) と称し，そうでない場合は**陰的公式** (implicite formula) と称することは ODE の場合と同様である．

8.1.4　近似の種類と精度

数値近似解に対しては離散化の段階において，近似過程の評価基準をどこに

置くかに応じて自ずと，以下に述べる**強近似**と**弱近似**と称する 2 通りの区別[*2]が出てくる；

(1) 強近似（軌道の近似）： 近似値 $\{\overline{X}_i, 0 \le i \le N\}$ が適当な $q \ge 1$ に対して次の評価基準，$E[\max_i \|X_{t_i} - \overline{X}_i\|_q] = O(|\Delta|^p)$ を満たすとき，これを p 次の強近似解という．ここに，$\|X\|_q = \{\sum_i |X^i|^q\}^{1/q}$ （通常は $q = 1, 2$ ととる），また $|\Delta| = \max_i |t_{i+1} - t_i|$ （時間区間分割 Δ の幅）である．

(2) 弱近似（分布の意味での近似）： 上とは異なり，任意のテスト関数 $\varphi(x) \in C_b^2$ 対して次の評価基準を満たす場合，近似法は p 次の弱近似を与えるという：

$$\max_i |E\varphi(X_{t_i}) - E\varphi(\overline{X}_i)| = O(|\Delta|^p)$$

この場合，近似量 $\{\overline{X}_i\}$ は同一の確率空間で与えられている必要はないことに注意．

解 X_t に対して $E\varphi(X_t)$ のような統計量の近似を求めること（その中には，対応する拡散方程式の解を求めることも含まれる）に関心がある場合は弱近似解で十分であるが，SDE で記述される力学系のリャプノフ指数を求めたり，エルゴード的系の不変測度，あるいは非線形フィルタの構成など，SDE の解の軌道に直接依存する量に関心がある場合は強近似解を構成する必要がある．離散化モデルの構成の仕方もそのような用途に応じて異なるが，強近似解は弱近似解を兼ねるということもあって，強近似解についての議論が数値近似理論の基礎になっている．

8.2 離散化の方法——確率的テイラー展開

確率微分方程式 (8.3) の解 X をブラウン運動 W の汎関数と見てそれの多項式[*3] に展開していくことを考える．基本になるのは次の**伊藤の公式**である：

[*2]確率微分方程式の解には 2 通りのとらえ方，強解と弱解，がある．解をブラウン運動が定義されているのと同じ確率空間に構成できるか，あるいは両者を別の空間であつらえるかの違いである．

[*3]重複ウィーナー積分 (multiple Wiener integral)

$\varphi(x) \in C^2(R^d)$ に対して，

$$\varphi(X_t) = \varphi(X_s) + \int_s^t (\text{Ł}_1\varphi)(X_r)dr + \sum_{j=1}^m \int_s^t ((\text{Ł}_2\varphi)(X_r))_j\, dW_r^j \qquad (8.5)$$

ただし，Ł$_1$，Ł$_2$ は次のような微分作用素である．

$$\text{Ł}_1 \ : \ (\text{Ł}_1\varphi)(x) = \sum_{i=1}^d a^i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(x) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^m\sum_{i,j=1}^d b_k^i(x)b_k^j(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\varphi(x)$$

$$\text{Ł}_2 \ : \ C^2(R^d) \ni \varphi \ \longrightarrow (\text{Ł}_2\varphi)(x) \in R^m$$

で，成分ごとに書けば，

$$((\text{Ł}_2\varphi)(x))_j = \sum_{i=1}^d \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}b_j^i(x) \quad (j = 1, \cdots, m)$$

解 X_t の各成分 X_t^i は

$$X_t^i = X_s^i + \int_s^t a^i(X_r)dr + \int_s^t \sum_j b_j^i(X_r)dW_r^j$$

であり，右辺に現れる量 $a^i(X_r)$，$b_j^i(X_r)$ に再度伊藤の公式を適用すれば，

$$X_t^i = X_s^i + a^i(X_s)\int_s^t dr + \sum_{j=1}^m b_j^i(X_s)\int_s^t dW_r^j + R \qquad (8.6)$$

ここに R は剰余項で，

$$\begin{aligned} R \ =& \int_s^t dr \int_s^r \left\{ \text{Ł}_1 a^i(X_{r_1})dr_1 + \sum_{j=1}^m ((\text{Ł}_2 a^i)(X_{r_1}))_j dW_{r_1}^j \right\} \\ &+ \sum_{j=1}^m \int_s^t dW_r^j \int_s^r \left\{ \text{Ł}_1 b_j^i(X_{r_1})dr_1 + \sum_{k=1}^m ((\text{Ł}_2 b_j^i)(X_{r_1}))_k dW_{r_1}^k \right\} \end{aligned} \qquad (8.7)$$

剰余項 R に現れる被積分項に同様の操作をもう一度施して，次の展開式を得る．

$$X_t^i = X_s^i + a^i(X_s)\int_s^t dr + \sum_{j=1}^m b_j^i(X_s)\int_s^t dW_r^j + \sum_{j=1}^m\sum_{k=1}^m ((\text{Ł}_2 b_j^i)(X_s))_k \int_s^t dW_r^j \int_s^r dW_{r_1}^k + R_1 + R_2 + R_3 \tag{8.8}$$

ここでの剰余項 R_i $(i=1,2,3)$ は次のような量,

$$\begin{aligned}
R_1 &= (\text{Ł}_1 a^i)(X_s)\int_s^t dr\int_s^r dr_1 + \int_s^t dr\int_s^r \{(\text{Ł}_1 a^i)(X_{r_1}) - (\text{Ł}_1 a^i)(X_s)\}dr_1 \\
R_2 &= \sum_{j=1}^m \left[((\text{Ł}_2 a^i)(X_s))_j \int_s^t dr \int_s^r dW_{r_1}^j \right. \\
&\quad \left. + \int_s^t dr \int_s^r ((\text{Ł}_2 a^i)(X_{r_1}) - (\text{Ł}_2 a^i)(X_s))_j dW_{r_1}^j \right] \\
&\quad + \sum_{j=1}^m \left[(\text{Ł}_1 b_j^i)(X_s)\int_s^t dW_r^j \int_s^r dr_1 \right. \\
&\quad \left. + \int_s^t dW_r^j \int_s^r \{(\text{Ł}_1 b_j^i)(X_{r_1}) - (\text{Ł}_1 b_j^i)(X_s)\}dr_1 \right] \\
R_3 &= \sum_{j=1}^m\sum_{k=1}^m \left[\int_s^t dW_r^j \int_s^r dW_{r_1}^k \int_s^{r_1} (\text{Ł}_1(\text{Ł}_2 b_j^i)_k)(X_{r_2})dr_2 \right. \\
&\quad + \sum_{l=1}^m \left\{ (\text{Ł}_2(\text{Ł}_2 b_j^i)_k)_l(X_s)\int_s^t dW_r^j \int_s^r dW_{r_1}^k \int_s^{r_1} dW_{r_2}^l \right. \\
&\quad \left.\left. + \int_s^t dW_r^j \int_s^r dW_{r_1}^k \{(\text{Ł}_2(\text{Ł}_2 b_j^i)_k)_l(X(r_2)) - (\text{Ł}_2(\text{Ł}_2 b_j^i)_k)_l(X_s)\}dW_{r_2}^l \right\}\right]
\end{aligned} \tag{8.9}$$

R_1, R_2, R_3 に伊藤の公式を適用していけば，さらに高次の展開式が得られる．ODE の数値解法の場合に倣い，これらの展開式において剰余項を落とした部分に次の置きかえを施せば SDE の離散化モデル（差分公式ではない）が得られる，

- $t = t_{k+1}$,　$s = t_k$,　$\int_s^t dr = \Delta t := T/N$

  ただし $t_k = k\cdot\Delta t$　$(0 \le k \le N)$

- $\int_s^t dW_r^j = \int_{t_k}^{t_{k+1}} dW_r^j =: \Delta W_k^j \quad (1 \le j \le m)$
- $X_{t_k}^i \longrightarrow \overline{X}_k^i$
- 例えば，(8.6) 式からは次の離散化モデルが得られる：

$$\overline{X}_{k+1}^i = \overline{X}_k^i + a^i(\overline{X}_k)\Delta t + \sum_{j=1}^m b_j^i(\overline{X}_k)\Delta W_k^j$$

ここに，$\Delta W_k^j := W_{t_{k+1}}^j - W_{t_k}^j$

- 2 次の展開式 (8.8) からは，次のモデル，

$$\overline{X}_{k+1}^i = \overline{X}_k^i + a^i(\overline{X}_k)\Delta t + \sum_{j=1}^m b_j^i(\overline{X}_k)\Delta W_k^j$$
$$+\sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^m \left\{(\mathrm{L}_2 b_j^i)(\overline{X}_k)\right\}_l \int_{t_k}^{t_{k+1}} dW_r^j \int_{t_k}^r dW_{r_1}^l$$

8.2.1 狭義の差分法——何を基本的変量とするか？

(1) ODE の場合，現象の基底に流れる変量は，いわゆる**時間変数** "t" であり，差分公式は解の微小区間における増分 $\Delta_k \overline{X} = \overline{X}_{t_{k+1}} - \overline{X}_{t_k}$ を $\overline{X}_{t_i}$ $(i \le k)$ と基本変量の増分 $\Delta_k t = t_{k+1} - t_k$ に関係づける式である．SDE においては基本的変量が t と W_t の二つあり，何をもって**基本的増分**とするかが問題になる．すなわち，上の展開式に直接対応するならば次の諸量が必要となる：

$$\Delta t = \int_{t_k}^{t_{k+1}} dr, \quad \Delta_k W^i = \int_{t_k}^{t_{k+1}} dW_r^i,$$
$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} dW_r^i \int_{t_k}^r dW_{r_1}^j, \quad \int_{t_k}^{t_{k+1}} dr \int_{t_k}^r dW_{r_1}^i,$$
$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} dW_r^i \int_{t_k}^r dr_1, \quad \int_{t_k}^{t_{k+1}} dW_r^i \int_{t_k}^r dW_{r_1}^j \int_{t_k}^{r_1} dW_{r_2}^l,$$
$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} dr \int_{t_k}^r dW_{r_1}^i \int_{t_k}^{r_1} dW_{r_2}^j, \quad \int_{t_k}^{t_{k+1}} dW_r^i \int_{t_k}^r dr_1 \int_{t_k}^{r_1} dW_{r_2}^j,$$
$$\cdots, \mathrm{etc.}$$

(2) 数値化の段階ではこれらの諸量をしかるべき乱数で置きかえる必要がある．例えば，第 1 行目の $\{\Delta_k W^i, 1 \leq i \leq m\}$ には同一分布 $N(0, \Delta t)$ に従う m 個の独立な正規乱数を当てる．第 3 行目の諸量は正規確率変数である．$\{\Delta_k W^i\}$ との結合分布もわかるから，この点に整合性をとる必要はあるが，これも正規乱数で数値化できる．

しかし，多重ウィーナー積分項が介入する他の量については一般に理論的分布を求めることが困難であり，乱数でシミュレートする思惑は潰える*4.

(3) 「SDE の差分法とは」

そこで SDE の強近似解の構成という目的に対しては，このうち第 1 行目の 2 量のみを含み，3 行目以下のものを含まない式を差分公式と称する立場がある．第 2 行目については場合による（後出の可換性条件の項参照)．これはブラウン運動 W_t の各成分の増分 $\Delta_k W^i$（あるいは，節点 $\{(t_k, W^i_{t_k}),\ 0 \leq k \leq N\}$ を折れ線接続して得られるブラウン運動の近似過程 $\overline{W}^i_t$）が与えられているとの前提の下で，強近似解を構成するということであるから**強解**に対応する概念である．以下，この立場を便宜上，**狭義差分法の定義**と称することにする．

8.2.2 狭義差分法の例

(1) オイラー–丸山法：一般に，上に述べた条件に適うのは (8.6) 式において第 1 行目を採用して得られる次の差分公式だけである．SDE の解をオイラー法を用いて構成することにより，その存在を示した丸山儀四郎氏の業績 [18] にちなみ，この差分法はオイラー–丸山の差分公式と称されている．

$$\begin{cases} \overline{X}^i_{k+1} = \overline{X}^i_k + a^i(\overline{X}_k)\Delta t + \displaystyle\sum_{j=1}^{m} b^i_j(\overline{X}_k)\Delta W^j_k \\ \overline{X}^i_0 \quad = \xi^i \quad (i = 1, \cdots, d) \end{cases} \tag{8.10}$$

(2) ミルシュタイン (Mil'stein) 法：高次の展開式 (8.8) において第 2 行目までをとれば，基本的変量の増分として多重ウィーナー積分項，$\int_{t_k}^{t_{k+1}} dW^{j_1}_r \int_{t_k}^{r} dW^{j_2}_{r_1}$

*4 例えば，第 2 行目の 2 次の多重積分項については，$m \geq 2$ の場合ブラウン運動 $W = (W^1, W^2, \cdots, W^m)$ の汎関数として至るところ不連続となることがわかっている [8].

が現れる．$j_1 \neq j_2$ の場合，この項はブラウン運動の差分で表すことはできないが，次の等式：

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} dW_r^{j_1} \int_{t_k}^{r} dW_{r_1}^{j_2} + \int_{t_k}^{t_{k+1}} dW_r^{j_2} \int_{t_k}^{r} dW_{r_1}^{j_1} = \Delta_k W^{j_1} \cdot \Delta_k W^{j_2}$$

に注目して，SDE の係数が以下に記す**可換性条件**:

$$\sum_{h=1}^{d} b_{j_1}^h(x) \frac{\partial b_{j_2}^k}{\partial x_h} = \sum_{h=1}^{d} b_{j_2}^h(x) \frac{\partial b_{j_1}^k}{\partial x_h}$$

を満たす場合には，簡単な視察により展開式 (8.8) から，次のミルシュタインの差分公式[9, 19] が得られることがわかる．

$$\begin{cases} \overline{X}_{k+1}^i = \overline{X}_k^i + a^i(\overline{X}_k)\Delta t + \sum_{j=1}^{m} b_j^i(\overline{X}_k)\Delta W_k^j \\ \qquad\qquad + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{d}\sum_{j_1,j_2=1}^{m}\left\{\left(b_{j_1}^l \frac{\partial b_{j_2}^i}{\partial x_l}\right)(\overline{X}_k)(\Delta_k W^{j_1}\Delta_k W^{j_2} - \delta_{j_1,j_2}\Delta t)\right\} \\ \overline{X}_0^i \quad = \xi^i \quad (i = 1, \cdots, d) \end{cases} \tag{8.11}$$

(3) 1 次元，$d = m = 1$ の場合，可換性の条件は常に成立しており，差分公式は次のようになる．

$$\begin{cases} \overline{X}_{k+1} = \overline{X}_k + a(\overline{X}_k)\Delta t + b(\overline{X}_k)\Delta W_k \\ \qquad\qquad + \frac{1}{2} b(\overline{X}_k) b'(\overline{X}_k)\{(\Delta_k W)^2 - \Delta t\} \\ \overline{X}_0^i \quad = \xi^i \quad (i = 1, \cdots, d) \end{cases} \tag{8.12}$$

註 8.2 後で説明するが SDE の強近似解構成のための 狭義 差分公式は基本的に上の 2 つ (1), (2) に尽きる．

8.2.3 狭義差分モデルの精度

二つの差分公式，オイラー–丸山法とミルシュタイン法，による近似解の精度に関する結果を挙げておこう．まず基本的結果として次の，

定理 8.1 (1) オイラー–丸山法，ミルシュタイン法で構成される近似解はそれぞれ，1/2, 1 次の強近似解を与える，すなわち：

$$E\left[\max_k \|\overline{X}_k - X_{t_k}\|_2\right] = O((\Delta t)^p), \quad \left(p = \frac{1}{2},\ 1\right)$$

(2) しかし，両者とも弱近似解としての精度は 1 次である．

後で非線形 SDE の近似精度を議論する際の参考となるので，上の結果 (2) に関連して，特にオイラー–丸山法の弱近似精度が 1 であることを示す結果を紹介しておく．

定理 8.2 (D.Talay[48]) $\overline{X}_{t_i}$ を SDE(8.3) の オイラー–丸山近似解とし，滑らかな関数 $\varphi(x)$ に対して $E_r(h,T) = E\varphi(\overline{X}_T) - E\varphi(X_T)$ とおくと，次式が成り立つ；

$$E_r(h,T) = h\int_0^T E\psi(s, X_s)ds + O(h^2) \tag{8.13}$$

ここに，$\psi(t,x) = (1/2)[(\partial_t + L_1)^2 u](t,x)$ であり，$u(t,x)$ は次の方程式の解である：

$$(\partial_t + L_1)u = 0, \quad u(T,x) = \varphi(x)$$

証明 便宜上次の補助的近似過程 $\{\tilde{X}_t\}$ を導入する．

$$\begin{cases} d\tilde{X}^i_t = a^i\left(\eta(t), \tilde{X}_{\eta(t)}\right)dt + \displaystyle\sum_{j=1}^m b^i_j\left(\eta(t), \tilde{X}_{\eta(t)}\right)dW^j_t \quad (1 \le i \le d) \\ X^i_0 = \xi^i(\omega) \quad (1 \le i \le d) \\ \text{ここに，} \eta(t) = t_i \text{ for } t_i \le t < t_{i+1} \end{cases} \tag{8.14}$$

$\tilde{X}_{t_k} = \overline{X}_{t_k}$ であることに注意されたい．またこの近似過程に対応して次の作用素を考える．

$$\text{Ł}^0_s = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_i a^i\left(\eta(s), \overline{X}_{\eta(s)}\right)\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_k\sum_{i,j} b^i_k b^j_k\left(\eta(s), \overline{X}_{\eta(s)}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

さて，$X_s^{(t,x)}(t \leq s \leq T)$ を SDE の解で $X(t) = x$ を満たすものとすれば，$u(t,x) = E\varphi(X_T^{(t,x)})$ であり，さらに $E\varphi(\overline{X}_T) = u(T, \overline{X}_T)$，$E\varphi(X_T) = u(0,x)$ であることに注意して次の等式を得る．

$$
\begin{aligned}
E_r(h,T) &= u(T, \overline{X}_T) - u(0,x) \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ Eu((k+1)h, \tilde{X}_{k+1}) - Eu(kh, \tilde{X}_k) \right\} \\
&= E \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \{\mathbb{L}_s^0 u\}(s, \overline{X}_s) ds \\
&= E \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ h(\mathbb{L}_{t_k}^0 u)(t_k, \overline{X}_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \{(\mathbb{L}_s^0 u)(s, \tilde{X}_s) \right. \\
&\qquad \left. -(\mathbb{L}_s^0 u)(t_k, \overline{X}_k)\} ds \right\} \\
&= E \sum_{k=0}^{N-1} \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} ds \int_{t_k}^{s} (\mathbb{L}_r^0 \mathbb{L}_s^0 u)(r, \tilde{X}_r) dr \right)
\end{aligned}
$$

$s, r \in [t_k, t_{k+1})$ であるから，

$$
\begin{aligned}
&= \frac{h^2}{2} E \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ (\mathbb{L}_k^0)^2 u(t_k, \overline{X}_k) \right\} + E \sum_{k=0}^{N-1} \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} ds \int_{t_k}^{s} dt \int_{t_k}^{t} (\mathbb{L}_k^0)^3 u(r, \tilde{X}_r) dr \right) \\
&= h^2 E \sum_{k=0}^{N-1} \psi(t_k, \overline{X}_k) + O(h^3)
\end{aligned}
$$

これとリーマン積分の定義より結論を得る：

$$
\begin{aligned}
E_r(h,T) &= h^2 \sum_{k=0}^{N-1} E\psi(t_k, \overline{X}_k) + O(h^2) \\
&= h \int_0^T E\psi(s, X_s) ds + O(h^2) \qquad \square
\end{aligned}
$$

オイラー–丸山法もミルシュタイン法も弱近似精度は共に 1 であることを見たが，実は精度 1 の弱近似に関しては次の注目すべき結果がある．

定理 8.3（**Mil'stein**[20]，**ほか**[47]）　次の計算法は弱近似精度 1 を持つ．

$$\begin{aligned}\overline{X}^i_{k+1} &= \overline{X}^i_k + a^i(\overline{X}_k)\Delta t + \sum_{j=1}^{m} b^i_j(\overline{X}_k)\sqrt{\Delta t}\ \Xi^j_k \\ \overline{X}^i_0 &= \xi^i \quad (i = 1, .., d)\end{aligned} \tag{8.15}$$

ただし，$\{\Xi^j_k\}$ は平均 0，分散 1 ($E[\Xi] = 0$, $\mathrm{Var}\,\Xi = 1$) のベルヌイ列である．

この結果は最初 1 次元（$d = m = 1$）の場合にミルシュタインによって示された．SDE の数値近似に使用する乱数は必ずしも正規分布に従うものでなくてよいことを示しており，極めて実際的な点が面白いのである．

8.2.4 補足——ルンゲ-クッタ法

ミルシュタインの差分公式には係数 $b^i_j(x)$ の導関数が現れており，これは数値計算の立場から見ればもちろん好ましいことではない．ODE の数値近似法に倣い SDE に対するルンゲ-クッタ (Runge-Kutta) 法の適用が考えられる．

次に示すのは ホイン（Heun）法の確率解析版 (stochastic version) である．

$$\begin{aligned}\overline{X}^i_{k+1} &= \overline{X}^i_k + a^i(\overline{X}_k)\Delta t + \sum_{j=1}^{m}\frac{1}{2}\Big\{b^i_j(\overline{X}_k) + b^i_j(\overline{Y}_{k+1})\Big\}\Delta W^j_k \\ \overline{Y}^i_{k+1} &= \overline{X}^i_k + a^i(\overline{X}_k)\Delta t + \sum_{j=1}^{m} b^i_j(\overline{X}_k)\Delta W^j_k \quad (\overline{X}^i_{k+1}\ \text{の予測子}) \\ \overline{X}^i_0 &= \xi^i \quad (i = 1, \cdots, d)\end{aligned} \tag{8.16}$$

このホイン法については次の結果：

定理 8.4　係数 $\{b^i_j(x)\}$ が可換性の条件を満たすとき，ホイン法で構成される近似過程は，元の SDE (8.3) を非因果的積分（附録 9.12 参照）の意味で解釈し直した SDE の因果的解（causal solution）に対して 1 次の強近似解を与える．

8.2.5 狭義差分法の精度限界

これまで，テイラー展開法から導かれた二つの差分公式**オイラー–丸山法**，**ミルシュタイン法**について結果を紹介してきた．ここで先に挙げた疑問「テイラー

展開法以外の手法で同等の，あるいはさらに高い，精度の差分公式が得られるのではないか？」を取り上げたい．次の結果がミルシュタインにより示されている，すなわち：

定理 8.5[19] Δt, ΔW, $(\Delta W)^2$ の 3 項式で表される狭義差分法の中で強近似精度が 1 次のものはミルシュタイン法に限る．

同様にして「精度が 1/2 次の差分法はオイラー–丸山法に限る」こともわかる．逆に差分法の精度限界については以下の結果が知られている．

定理 8.6（W.Rümelin[46]） ルンゲ–クッタ法で実現できる強近似精度は高々 1 次である．

さらに一般的に，

定理 8.7（J.Clark-R.Cameron[9]） ブラウン運動の折れ線近似過程の汎関数として表される強近似解の最高精度は 1 次である（すなわち，狭義差分法が到達しうる強近似精度は高々 1 である）．

8.2.6 精度改良の工夫——リチャードソン加速法

オイラー–丸山法もミルシュタイン法（可換性条件の下での）も弱近似精度は「1」であることを見たが，これら差分法でもその適用の仕方を少し工夫すれば弱近似精度を上げることが可能である．すなわち ODE の数値解法において**リチャードソン**（Richardson）**加速法**あるいは**ロンバーグ**（Romberg）**積分法**として知られている手法が SDE に対しても有効である．D.Talay-L.Tubaro[50] に従ってその結果を紹介しておこう．SDE(8.3)

$$
\begin{cases}
dX_t^i = a^i(t, X_t)dt + \displaystyle\sum_{j=1}^{m} b_j^i(t, X_t)dW_t^j \quad (1 \le i \le d) \\
X_0^i = \xi^i(\omega) \quad (1 \le i \le d)
\end{cases}
$$

において，区間 $[0,T]$ を n 等分割した分点 $t_k=kh,\ h=T/n\ (0\le k\le n)$ に沿って構成したオイラー–丸山近似解を $\overline{X}_k^h$ とする．適当なテスト関数 $\varphi(x)\in C_b^2(R^d)$ を固定し，近似解の弱近似誤差 $E_r(h,T):=E\varphi(\overline{X}_n^h)-E\varphi(X_T)$ を考えると，分割のピッチ h に対する依存性については既に定理 8.13 を得ている，すなわち．

定理 8.8 [50)]

$$E_r(h,T)=h\int_0^T E\psi(s,X_s)ds+O(h^2)$$

ここに $\psi(t,x)$ はピッチ h には依存しない関数である．
ここで分割数を 2 倍（したがって，ピッチは 1/2）にした分割に対応するオイラー–丸山近似解 $\overline{X}_k^{h/2}$ に上の結果を適用すれば，

$$E_r(h/2,T)=E\varphi\left(\overline{X}_{2n}^{h/2}\right)-E\varphi(X_T)=-(h/2)\int_0^T E\psi(s,X_s)ds+O(h^2)$$

これより，

$$E\left\{2\varphi\left(\overline{X}_{2n}^{h/2}\right)-\varphi(\overline{X}_n^h)\right\}=E\varphi(X_T)+O(h^2)$$

すなわち，上式左辺の量，$2\varphi(\overline{X}_{2n}^{h/2})-\varphi(\overline{X}_n^h)$ を用いた弱近似の精度は 1 つ上がることになる．

8.3 弱近似精度——非線形 SDE の場合

解の生成作用素が非線形であるような SDE，すなわち係数 $a(x)$, $b(x)$ が未知解 X の分布に依存するような SDE を非線形 SDE とよぶ．数理物理学的現象の中でも非線形拡散現象としてとらえられるものは，乱流，拡散律速反応など数多くある．非線形 SDE はこのような現象に対する確率論の立場からの直接的なモデルである．これまで対象とした SDE は一般的な形のものではあったが，近似理論の展開に際しては上の意味で線形であるということを暗黙のうちに仮定していた．では非線形拡散過程，あるいは SDE の数値近似問題はどのように扱えばよいのであろうか？

8.3.1 滑らかなモデル

簡単のために次のような非線形方程式について考えよう，ただし，$F(x), G(x)$ は滑らかで有界な関数であり，係数 $a(t,x,y)$, $b(t,x,y)$ も滑らかで，(x,y) についての増大のオーダーは高々 1 次とし，また初期値 $u_0(x)$ は有界な台を持つとしておく．

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}u + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{a^i(x, F * u(t))u\right\} \sum_{i,j=1}^{d} \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left\{\sum_{k=1}^{m} b_k^i b_k^j (x, G * u(t))u\right\} \\
&u(0,x) = u_0(x) \\
&F * u(t,x) = \int_{R^d} F(x-y)u(t,y)dy \\
&G * u \text{ についても同様.}
\end{aligned} \tag{8.17}
$$

SDE の形で書けば，

$$
\begin{aligned}
dX_t &= a\big(X_t, F * u(t,\cdot)\big)dt + \sum_j b^j\big(X_t, G * u(t,\cdot)\big)dW_t^j, \quad t \in [0,T] \\
X_0 &= \xi(\omega)
\end{aligned} \tag{8.18}
$$

ここに, $u(t,\cdot) =$ 解 X_t の pdf(分布密度関数), $X_t = (X_t^1, X_t^2, \cdots, X_t^d)^t \in R^d$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_m)$ は $m \times d$–行列, $a(t,x) = (a^1, a^2, \cdots, a^d)^t \in R^d$

上の SDE (8.18) の弱近似解が構成できれば，非線形問題 (8.17) の数値近似解を得ることができよう．が，このモデル (8.18) は係数に未知解 X_t の分布密度 $u(t,x)$ を含んでおり，したがってそのままの形では差分法を適用し難く，なにがしかの工夫が必要となる（文献 36–38,40) 参照)．よく使われる手段は，この係数中の未知分布を多数の粒子群が作る平均場としてとらえ，複数のモデルを並列に走らせたシステムで近似するというものである．すなわち次のような N-粒子系モデルを考える；

$$\begin{cases} dX_t^i = a\left(X_t^i, \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{j\neq i}^{N} F(X_t^i - X_t^j)\right) dt \\ \qquad\qquad + \displaystyle\sum_{j=1}^{m} b^j\left(X_t^i, \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{j\neq i}^{N} G(X_t^i - X_t^j)\right) dW_i^j(t) \\ X_0^i = \xi^i \quad (1 \leq i \leq N) \end{cases} \tag{8.19}$$

ここに，$\{\xi^i, 1 \leq i \leq N\}$，$\{W_i^j(\cdot), 1 \leq i \leq N,\ 1 \leq j \leq m\}$ はそれぞれ，初期値 ξ と R^m 値ブラウン運動 $W(\cdot)$, に対する N 個の独立なコピーである．上の方程式にオイラー–丸山差分法を適用すれば，

$$\begin{cases} \overline{X}_{k+1}^i = a\left(\overline{X}_k^i, \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{j\neq i}^{N} F(\overline{X}_k^i - \overline{X}_k^j)\right) \cdot h \\ \qquad\qquad + \displaystyle\sum_{j=1}^{m} b^j\left(\overline{X}_k^i, \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{j\neq i}^{N} G(\overline{X}_k^i - \overline{X}_k^j)\right) \Delta_k W_i^j \\ \overline{X}_0^i = \xi^i \quad (1 \leq i \leq N,\quad 0 \leq k \leq (n-1)) \\ h = T/n,\quad \Delta_k W_i^j = W_i^j(t_{k+1}) - W_i^j(t_k),\quad t_k = kh \end{cases} \tag{8.20}$$

ここに $\overline{X}_k^i$ $(1 \leq i \leq N)$ はこれまでと同様に R^d 値確率変数 $X^i(t_k)$ の近似を表している．

一般（線形）の SDE に対しては，オイラー–丸山差分法の強近似精度は 1/2 であり，弱近似精度は 1 であることを既に見たが，このような非線形の SDE の場合でも基本的に強近似精度は 1/2，弱近似精度が 1 となることが示されている．すなわち，X_t^1 の $t_k = kh$ における近似値を $\overline{X}_k^h$ とすれば，次の結果が成り立つ；

定理 8.9 [38]
$$E[\max_k |\overline{X}_k^1 - X_{t_k}|^2] \leq C(h + N^{-1})$$

R^d 上の滑らかな実数値関数で，導関数が無限遠点において高々多項式程度の

増大度であるようなものの全体を C_p^∞ と記すことにする．オイラー- 丸山近似解の弱近似精度については次の結果；

定理 8.10（S.Ogawa-A.Kohatsu[39]） C_p^∞ 級の関数 $\varphi(x)$ に対して，次の評価が成り立つ．

$$\max_{1\le k\le n}|E\varphi(\overline{X}_k^1)-E\varphi(X_{t_k})|\le C\left(h+\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$$

ここに，n は差分の分割数（すなわち，$h=T/n$），C は N,k,n に依存しない定数である．

これから得られる帰結として，例えば，

系 8.1 任意の関数 $\varphi(x)\in C_p^\infty$ に対して次の評価が成り立つ：

$$\max_k E\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^N\varphi(\overline{X}_{t_k}^i)-E\varphi(X_{t_k})\right|\le C\left(\frac{1}{\sqrt{N}}+h\right)$$

上の定理 8.10 の結果は線形 SDE の場合と類似しているが，証明は線形 SDE の場合ほど簡単ではない．次節でその素描を示す．

8.3.2 定理 8.10 の証明

粒子数 N に対応して，次のような n 個の R^d 値補助過程 $\{Y_t^i,\ 1\le i\le N\}$ を導入する；

$$\begin{cases} dY_t^i=a(\eta(t),Y_{\eta(t)}^i,F*v(\eta(t))dt+\displaystyle\sum_{j=1}^m b^j\left(\eta(t),Y_{\eta(t)}^i,G*v(\eta(t))\right)dW_i^j(t)\\ Y_0^i=\xi^i(\omega)\qquad(1\le i\le d)\\ \text{ここに}\quad \eta(t)=t_i\ \text{ for } t_i\le t<t_{i+1}\\ \text{また，}\quad v(t,x)=Y_t\ \text{の}\ pdf \end{cases}$$

ここで，Y_t^i $(1\le k\le N)$ は互いに独立で同分布を持つこと，したがって，pdf $v(t,x)$ は全ての Y_t^i について共通であることを注意しておく．また以下の議論

では Y_t でもって任意の一つ，例えば Y_t^1 と意味するものとしておく．

次の結果が成り立つ，

命題 8.1 $\varphi \in C_p^\infty$ に対して，

$$|E[\varphi(X_t) - \varphi(Y_t)]| \le C \cdot h$$

が成立する．ここに C は近似の分割 $\{t_k, 0 \le k \le n\}$ に依存しない定数である．

さらに Y^i と $\overline{X}^i$ については次の結果．

命題 8.2 $$E|\{\varphi(Y_t^i) - \varphi(\overline{X}_t^i)\}| \le C\frac{1}{\sqrt{N}}$$

容易にわかるように定理 8.10 はこれら二つの結果，命題 8.1 と命題 8.2 を組み合わせれば得られるので，これらの証明を与えればよいことになる．どちらも確率積分に関する部分積分公式の応用，によって検証される．詳細は関連文献を参照されたい．ここでは系 8.1 の証明を与えておこう．

証明 定理 8.10 より次の量，

$$D = E\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^N \varphi(\overline{X}_{t_k}^i) - E\varphi(\overline{X}_{t_k}^i)\right|$$

が同様の評価を満たすことを示せばよい．しかしこれは上の二つの命題と次の不等式より明らかである．

$$\begin{aligned}
D \le & \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N E\left|\varphi(\overline{X}_{t_k}^i) - \varphi(Y_t^i k)\right| + \frac{1}{N}\left\{\sum_{i=1}^N E\left(\varphi(Y_{t_k}^i) - E\varphi(Y_{t_k}^i)\right)^2\right\}^{1/2} \\
& + \left|E\{\varphi(Y_{t_k}^i) - \varphi(\overline{X}_{t_k}^i)\}\right| \\
\le & C\left(\frac{1}{\sqrt{N}} + h\right)
\end{aligned}$$

□

9

附　　録

9.1　ポアソンの少数法則

$X \sim B(n,p)$ とする．定義より，

$$p_k := P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad (0 \le k \le n)$$

である．ここで，条件

$$\lambda = np (= E[X]) = \text{正定数}$$

を保ったまま極限 $\lim_{n\to\infty} p_k$ を求めてみる．$p = \lambda/n$ であるから，

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} 1 \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \end{aligned}$$

これより直ちに，

$$\lim_{n\to\infty} p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

を得，これより 2 項分布は平均値 np を一定値 λ に保ったまま n を十分大きくとればポアソン分布で近似されることを知る．

9.2　定理 3.6　劣マルチンゲール不等式の証明

$c > 0$ を固定し，これへの到達時間を $\mathbf{T} = \min\{k; X_k \ge c\}$ とおくと，

$$P(\max_{1\le n\le N} X_n \ge c) = P(\mathbf{T} \le N)$$

である．事象 $A := \{\mathbf{T} \le N\}$ は

$$\{\mathbf{T} \le N\} = \bigcup_{k=1}^{N} A_k, \quad A_k := \{\mathbf{T} = k\}$$

のように排反事象系の和に分解されることと，$A_k \in \mathcal{F}_k \quad (1 \le k)$ であることに注意すれば次の不等式が得られる；

$$\begin{aligned} E[X_n; A] &= \sum_{k=1}^{N} E[X_N; A_k] = E[X_N; A] + \sum_{k=1}^{N-1} E[E[X_N|\mathcal{F}_k]; A_k] \\ &\ge E[X_N; A] + \sum_{k=1}^{N-1} E[X_k; A_k] = E[X_\mathbf{T}; A] \\ &\ge cP(A) \end{aligned}$$

$E[X_N; A] \le E[X_N^+; A] \le E[X_N^+]$ であったから，これより結論を得る． □

9.3 定理 3.7 の証明

X_t は可分であるから，可算点の集合 Q^1 がとれて，

$$P(\max_{0\le s\le t} X_s \ge c) = P(\max_{s\in Q^1\cap[0,t]} X_s \ge c)$$

となる．$Q^1 \cap [0,t] = \{s_i, i \ge 1\}$ とおけば，上式右辺の量については次の不等式が成り立つ；

$$\begin{aligned} P(\max_{s\in Q^1\cap[0,t]} X_s \ge c) &= \lim_{n\to\infty} P(\max_{1\le k\le n} X_{s_k} \ge c) \\ &\le \frac{1}{c} \lim_{n\to\infty} E[X_{s_n}^+] = \frac{1}{c} E[X_t^+] \end{aligned}$$

これより結論を得る。

9.4 無限小の記号

数列 $\{a_n\}$ が $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であるとき，これがどれほど速く 0 に収束するのかを表すのが次のランダウの無限小記号である; 0 に収束する別の正数列 $\{b_n\}$ $(\lim_{n\to\infty} b_n = 0)$ を考えこれとの比較を行う．

(1) $\{a_n\}$ が $\{b_n\}$ と同程度に速く 0 に収束するとき，すなわち $\{a_n/b_n\}$ が有界であるとき，a_n は b_n と**同位の無限小**であるといい，$a_n = O(b_n)$ と記す．例えば，$a_n = 1 - \cos 1/n$ であれば $a_n = O(1/n^2)$ である．O をラージオーと読む．

(2) $\{a_n\}$ が $\{b_n\}$ よりも速く 0 に収束するとき，すなわち $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = 0$, であるとき，$a_n$ は b_n より**高位の無限小**であるといい，$a_n = o(b_n)$ と記す．例えば，$a_n = 1 - \cos 1/n$ であれば $a_n = o(1/n)$ である．o はスモールオーと読む．

数列に限らず連続変数の関数値の小ささを同様の記号で表す．例えば，$f(x) = \sin x^\alpha$ $(\alpha > 0)$ であれば，$|x| \to 0$ に際して，$f(x) = O(x^\alpha)$ である，あるいは $0 < \beta < \alpha$ である β に対して $f(x) = o(x^\beta)$ である，などという（微積分の教科書参照．例えば，文献 2)）

9.5 テイラーの定理

d-変数実数値関数 $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_d) \in \mathbf{R}^d$ が 開区間 $(\alpha, \beta) \subset \mathbf{R}^d$ で n 回連続的微分可能であるとき，$(\alpha, \beta) \ni \mathbf{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_d)$ と十分小さな $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \cdots, h_d)$ に対して $0 < \theta < 1$ となる正定数 θ がとれて，次式が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
&f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) \\
&\quad = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \left[\left(\sum_{j=1}^{d} h_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^k f \right] (\mathbf{a}) + \frac{1}{n!} \left[\left(\sum_{j=1}^{d} h_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^n f \right] (\mathbf{a} + \theta \mathbf{h})
\end{aligned}
$$

例えば $d = 2$ の場合は，$\mathbf{a} = (a, b)$, $\mathbf{h} = (h, k)$ として，

$$
\begin{aligned}
&f(a + h, b + k) \\
&\quad = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \left[\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^k f \right] (a, b) + \frac{1}{n!} \left[\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f \right] \\
&\quad \times (a + \theta h, b + \theta k)
\end{aligned}
$$

となっている．

9.6 スティールチェス積分

$I = [a, a + \Delta x]$ の長さをルベーグ測度 $\mu(I) = \Delta x$ で与えることを基準として導入されたのが通常の積分 $\int g(x)d\mu(x)$ であった．これに対してその区間の長さを，有界変動関数 $F(x)$ が導入する有界測度，$\mu_F(I) := \Delta F = F(a + \Delta x) - F(a)$ で測り直して組み立てられるのが（ルベーグ）スティールチェス積分 $\int g(x)dF(x)$ である．これに対して，リーマン型のスティールチェス積分は次のようにして導入される；被積分関数 $g(x)$ の積分区間 $[a, b]$ の分割 $\Delta = \{a \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leq b\}$ に対するリーマン和，

$$S(g; \Delta) := \sum_{x_i \in \Delta} g(\xi_i)\{F(x_{i+1}) - F(x_i)\}$$

ただし，ξ_i は各小区間 $[x_i, x_{i+1})$ 内の任意の点を表す，を考え，$|\Delta| = \max_i(x_{i+1} - x_i) \to 0$ としたときの極限値，を $g(x)$ の dF に関するスティールチェス積分 $\displaystyle\int_a^b g(x)dF(x)$ とする．

$$\int_a^b g(x)dF(x) := \lim_{|\Delta| \to 0} S(g; \Delta), \quad |\Delta| = \max\{x_{i+1} - x_i\}$$

例えば，連続関数は有限区間上で積分可能である．

9.7 パーセヴァルの等式

$L^2(0,1)$ を区間 $[0,1]$ 上の 2 乗可積分関数の空間

$$L^2(0,1) = \left\{ f(x) : \int_0^1 f^2(x)dx < \infty \right\}$$

とし，$\{\varphi_n(x)\}$ を $L^2(0,1)$ における正規直交底とする．単に記述の簡単さだけのために L^2 は実空間としておく．$L^2(0,1) \ni f$ のフーリエ係数を $f_n := (f, \varphi_n) = \int_0^1 f(x)\varphi_n(x)dx$ とする．次の等式が成り立つ．

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 = \int_0^1 f^2(x)dx \tag{9.1}$$

これをパーセヴァル（Perseval）の等式という．

$L^2 \ni f,\ g$ をとり，それぞれのフーリエ係数を $f_n,\ g_n$ とすれば，等式 (9.1) より次の等式が成り立つことが容易にわかる；

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \cdot g_n = (f, g); = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

例えば二つの部分区間，$[0,s],[0,t] \subset [0,1]$ に応じて，$f(x) = \mathbf{1}_{[0,s]}(x)$，$g(x) = \mathbf{1}_{[0,t]}(x)$ とおけば，上の形のパーセヴァルの等式より，

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} f_n \cdot g_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^s \varphi_n(x)dx \int_0^t \varphi_n(x)dx \\ &= \int_0^1 \mathbf{1}_{[0,s]}(x)\mathbf{1}_{[0,t]}(x)dx = \min\{s,t\}\end{aligned}$$

が得られる．

9.8 ディニの定理

次の結果をディニ（Dini）の定理という．

定理 9.1　$\{f_n(x)\}$ を $[a,b]$ で定義された非負の連続関数列とする．級数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = S(x)$ が $[a,b]$ で各点収束し，極限関数 $S(x)$ が連続ならばこの収束は $[a,b]$ で一様収束である．

実際，$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ とおけば，$S_n(x)$ は単調増大列であることから明らかであろう．

9.9 命題 4.3 の証明

2 段階に分けて示す．

(1)　まず，$\mathbf{M}_2$ の下で 2 次平均連続な乱関数の全体を $\mathbf{M}_2^c$ とすれば，$\mathbf{M}_2^c$ は $\mathbf{M}_2$ で稠密であることに注意する．実際，$f \in \mathbf{M}_2$ に対して列 $\{f_n\}$ を，

$$f_n(t) := n \int_{(t-\frac{1}{n})\vee 0}^{t} f(s)ds$$

とおけばよい．

(2) ところが，$\mathbf{S}_2$ は明らかに $\mathbf{M}_2^c$ で稠密である．実際，$\mathbf{M}_2^c \ni f$ に対して 近似列 $\{f_n\}$ を以下で導入すれば，

$$f_n(t,\omega) := f\left(\frac{1}{n}[nt],\omega\right), \quad t \in [0,1]$$

$f_n \in \mathbf{S}_2$ であり，しかも $f \in \mathbf{M}_2^c$ の平均連続性より

$$\lim_{n\to\infty} ||f - f_n||_{L^2}^2 = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 E\left[\left\{f(s) - f\left(\frac{1}{n}[ns]\right)\right\}^2\right] ds = 0$$

が従う．よって，$\mathbf{S}_2$ は $\mathbf{M}_2$ で稠密であることが示された．□

9.10　マルチンゲールの 2 次変動量

2 乗可積分なマルチンゲール M_t について，$M_t^2 - [M]_t$ がマルチンゲールになることを示す．

実際，$M_t^2 = f(M_t)$，$f(x) = x^2$ に伊藤公式を適用すれば，

$$M_t^2 = M_0^2 + [M]_t + 2\int_0^t M_s dM_s$$

すなわち，$M_t^2 - [M]_t = M_t^0 + 2\int_0^t M_s dM_s$ となりこれより明らかである．□

9.11　作用素の半群

実数値連続関数の全体を $C(\mathbf{R})$ とし，距離 $||\cdot||$ を次で導入する；$f(x), g(x) \in C(\mathbf{R})$ に対して，$||f-g|| := \sup_{x\in\mathbf{R}} |f(x)-g(x)|$．原点との距離 $||f-0|| = ||f||$ を $f \in C(\mathbf{R})$ のノルムという．X_t を斉次マルコフ過程とし $\varphi(x) \in C(\mathbf{R})$ に対して次のような変換を考える．

$$(T_t\varphi)(x) := E[\varphi(X_t)|X_0 = x]$$

推移確率密度 $p(x,t,y)$ があれば，

$$(T_t\varphi)(x) = \int_{\mathbf{R}} \varphi(y)p(x,t,y)dy$$

である．T_t $(t \geq 0)$ は次の性質を持つ；

(1) $C(\mathbf{R})$ 上の線形作用素である．実際，X_t の初期値に関する連続性から容易にわかるように，$\varphi(x) \in C(\mathbf{R})$ であれば，$(T_t\varphi)(x) \in C(\mathbf{R})$ である．

(2) $T_0 = I$ （恒等作用素）．$(T_0\varphi)(x) = \varphi(x)$.

(3) $T_{s+t} = T_s T_t$ が成り立つ．実際，推移確率密度に関するチャップマン–コルモゴロフの公式より，

$$
\begin{aligned}
(T_{s+t}\varphi)(x) &= \int_{\mathbf{R}} p(x, s+t, y)\varphi(y)dy \\
&= \int_{\mathbf{R}} \varphi(z)dz \int_{\mathbf{R}} p(x,s,y)p(y,t,z)dy \\
&= \int_{\mathbf{R}} p(x,s,y)dy \int_{\mathbf{R}} p(y,t,z)\varphi(z)dz \\
&= \int_{\mathbf{R}} p(x,s,y)(T_t\varphi)(y)dy = (T_s(T_t\varphi))(x)
\end{aligned}
$$

すなわち $\{T_t\}$ は $C(\mathbf{R})$ 上の作用素半群になっている．

9.12 非因果的積分

非因果的積分については第 7 章で紹介したが，1979 年に著者によって導入され[25,26]，多くの基本的性質と確率解析への応用に関する結果が 1980 年代に著者自身によって得られている（例えば文献，25,27,28,31）など）．被積分関数が従来のごとく因果的な伊藤過程の場合，非因果的積分は対称積分を非因果的関数にまで自然に拡張した積分になっており，これに対して，ロシアのスコロハッド（Skorokhod）が導入したものは伊藤積分の拡張になっている (文献 30) を参照のこと)．

参 考 文 献

(単行本)

1) 小川重義，森　真 :(現象から学ぶ)　確率論入門，講談社サイエンティフィック (2002)
2) 小川重義，森　真：微積分入門，培風館 (2004)
3) 伏見正則：乱数，東大出版会 (1989)
4) 西尾真喜子：確率論，実教出版 (1990)
5) 伊藤　清：確率論，岩波書店 (1953)
6) Yoshida, K. : *Functional Analysis*, Springer-Verlag (1968)
7) McKean, H. : *Stochastic Integrals*, Academic Press (1968)

(論文など)

8) Bouleau, N. : Irregular and simulatable functionals on Wiener space, *(in manuscript)* (1992)
9) Clark, J. and Cameron, R. : Maximum rate of convergence of discrete approximation of SDE, *Lecture Notes in Information and Control*, Springer-Verlag
10) DelGado, R. and Jolis, M. : On a Ogawa-type integral with application to the fractional Brownian motion. *Stochastic Anal. Appl.*, **18**, No. 4, 617–634 (2000)
11) DelGado, R. : Multiple Ogawa, Stratonovich and Skorohod anticipating integrals. *Stochastic Anal. Appl.*, **16**, No. 5, 859–872 (1998)
12) Faure, O. : Numerical pathwise approximation of stochastic differential equations, *Prepublication of CAMM,* Ecole de Ponts et Chaussés, Paris (1990)
13) Gawarecski, L. and Mandrekar, V. : Ito-Ramer, Skorohod and Ogawa integrals with respect to Gaussian processes and their interrelationship. *Chaos expansions, multiple Wiener-Ito integrals and their applications* (Guanajuato, 1992), 349–373, Probab. Stochastics Ser., CRC (1994)
14) Ikeda, N. and Watanabe, S. : *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes.* Second edition. North-Holland Mathematical Library, 24. Kodansha, Ltd. (1989)
15) Itô, K. and Nisio, M. : On the convergence of sums of independent Banach space valued random variables, *Osaka J. Math.,***5**, 35–48 (1968)
16) Platen, E. and Kloeden, P. : *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations,* (monograph) Springer-Verlag (1992)
17) Mayer, P. and Mancino, M. : A counter-example concerning a condition of Ogawa integrability. Seminaire de Probabilites, XXXI, 198–206, *Lecture Notes in Math.*, 1655, Springer-Verlag (1997)
18) Maruyama, G. : Continuous Markov processes and stochastic equations, *Rend. Circolo.*

Math., Palermo **4**, 48-90 (1955)

19) Mil'stein, G. : Approximate integration of stochastic differential equations, *Theory Probab.Appl.,* **19**, 557-562 (1974)

20) Mil'stein, G. : A method of second-order accuracy integration of stochastic differential equations, *Theory Probab.Appl.,* **23**, 396-401 (1978)

21) Nualart, D. and Zakai, M. : On the relation between the Stratonovich and Ogawa integrals, *Ann. Probab.* **17**, No. 4, 1536–1540 (1989)

22) Ogawa, S. : On a Riemann definition of the stochastic integral,(I), *Proc.Japan Acad* ., **46**, 153–156 (1970)

23) Ogawa, S. : On a Riemann definition of the stochastic integral,(II), *Proc.Japan Acad* , **46**, 156–159 (1970)

24) Ogawa, S. : A partial differential equation with the white noise as a coefficient, Z.W.verw. Geb., **28**, 53–71, (1973)

25) Ogawa, S. : Sur le pruduit direct du bruit blanc par lui-même, *Comptes Rendus, Acad.Sci.*,Paris,Série A , **288**, 359–362 (1979)

26) Ogawa, S. : Quelques propriétés de l' integrale stocastqiue du type noncausal, *Japan J. Appl. Math.*, **2**, No.1, 229–240 (1984)

27) Ogawa, S. : Une remarque sur l'approximation de l'integrale stochastique du type noncausal par une suite des integrales de Stieltjes, *Tôhoku Math.J.*, **36**, 41–48, (1984)

28) Ogawa, S. : Sur la question d'existence de solution d'equation differentielle stochastique du type noncausal, *Kyoto J.Math.*, **24**, No1, 699–704 (1984)

29) Ogawa, S. and Sekiguchi, T. : On the Itô formula of noncausal type, *Proc.Japan Acad.*, **60**, Ser.A, No.7, 249–251 (1984)

30) Ogawa, S. : Noncausal Problems and Stochastic Calculus, (*in Japanese*), RIMS Report 527, *Proceedings of the Workshop on Noncausal Calculus and Related Problems*, pp.1–25, Kyoto Univ.Research Institute of Mathematical Sciences (1984)

31) Ogawa, S. : The stochastic integral of noncausal type as an extension of the symmetric integrals, *Japan J. Appl. Math.*, **2**, No.1, 229–240 (1985)

32) Ogawa, S. : On the stochastic integral equation of Fredholm type, in *Waves and Patterns*, (monograph), pp.597–605, Kinokuniya (1986)

33) Ogawa, S. : Pseudorandom functions whose asymptotic distributions are asymptotically Gaussian, *J.Math.Anal. and Appl.*, Academic Press, (1989)

34) Ogawa, S. : Topics in the theory of stochastic integral equations, in *Diffusion Processes and Related Problems in Analysis*, vol.I, pp.411–420, Birkhäuser, Boston (1990)

35) Ogawa, S. : On a stochastic integral equation for the random fields, in *Séminairs de Probabilités - xxv* 324–339, Springer-Verlag, (1991)

36) Ogawa, S. : Monte Carlo simulation of nonlinear diffusion processes I, *Japan J. Indust. Appl. Math.*, **2**, No.1, 25-33 (1994)

37) Ogawa, S. : Monte Carlo simulation of nonlinear diffusion processes II, *Japan J. Indust. Appl. Math.*, **11**, No.1, 31-45 (1996)

38) Ogawa, S. : On the numerical simulation of nonlinear SDEs and Burgers like processes, *Proc. Workshop on Turbulent Diffusion and Related Problems in Stochastic Numer-*

ics, ISM Research Report 99, pp.140–159, Institute of Statistical Mathematics, (1997)

39) Ogawa, S. and Kohatsu-Higa, A. : Weak rate of convergence for an Euler scheme of nonlinear SDEs, *Monte Carlo Methods and Applications*, **3-4**, 327–345, VSP Publisher (1997)

40) Ogawa, S. : On a deterministic approach to the numerical solution of the SDE – Application of pseudo random numbers and functions, *Math.and Computers in Simulation*, **55**, 209–214, Elsevier Science. (2001)

41) 小川重義：確率微分方程式の数値解法,「数学」第 **53** 巻, 第 1 号, pp.34–45, 1 月, 日本数学会 (2001)

42) Ogawa, S. : On the Brownian particle equations and the noncausal stochastic calculus, *Rendiconti Academia Nazionale delle Scienze* detta dei XL, 119, XXV, 125–139 (2001)

43) Ogawa, S. : Noncausal cauchy problem for the noncausal SDEs, *Stochastic Processes and Applications to Mathematical Finance* (monograph), World Scientific, (2004)

44) Ogawa, S. and Kohatsu-Higa, A. : A BPE Model for the Burers Equation, *RIMS Publications*, Kyoto University (2004)

45) Roynette, B. : Mouvement brownien et espaces de Besov. *Stochastics Stochastics Rep.*, **43**, No. 3-4, 221–260 (1993)

46) Rümelin, W. : Numerical treatment of stochastic differential equations, *SIAM J.Num.Anal.***19**, No. 3, (1982)

47) Talay, D. : Efficient numerical schemes for the approximation of expectations of functionals of S.D.E., *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, **61**, Springer-Verlag (1984)

48) Talay, D. : Second order discretization schemes of stochastic differential systems for the computation of the invariant law, *Stochastics and Stochastic Reports*, **29**, No. 1, 13–36, (1990)

49) Pardoux, E. and Talay, D. : Discretization and simulation of stochastic differential equations, *Acta Appl.Math.*, **3**, 23–47 (1985)

50) Talay, D. and Tubaro, L. : Expansion of the global error for numerical schemes solving stochastic differential equations, *Stochastic Analysis and Applications,* **8**, No. 4, 94–120 (1990)

51) Wagner, W. and Platen, E. : On a Taylor formula for a class of Ito processes, *Proba.and Math.Statist.*, **3**, 37–51 (1982)

52) Wong, E. and Zaka, M. : On the relationship between ordinary and stochastic differential equations, *Int. J. Engng. Sci.,* **3**, 213–229 (1965)

53) Zakai, M. and Nualart, D. : Generalized stochastic calculus and Malliavin calculus, *Proba.and Math.Statist.*, **3**, 37–51 (1987)

索　　　引

ナ　行

ハ　行

マ　行

ヤ　行

著者略歴

小川重義（おがわ・しげよし）

1945年　京都市に生まれる
1967年　京都大学工学部卒業
現　在　立命館大学理工学部数理科学科教授
　　　　工学博士
主な著書　『現象から学ぶ確率論入門』（共著，講談社サイエンティフィック，2002）
　　　　『微積分入門』（共著，培風館，2004）

シリーズ〈金融工学の基礎〉6
確率解析と伊藤過程　　定価はカバーに表示

2005年9月30日　初版第1刷

著　者　小　川　重　義
発行者　朝　倉　邦　造
発行所　株式会社　朝　倉　書　店
東京都新宿区新小川町6-29
郵便番号　162-8707
電　話　03(3260)0141
FAX　03(3260)0180
http://www.asakura.co.jp

〈検印省略〉

東京書籍印刷・渡辺製本

ISBN 4-254-29556-1　C 3350　　Printed in Japan